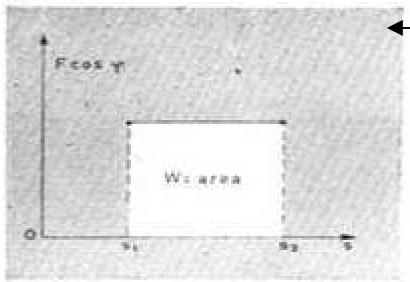
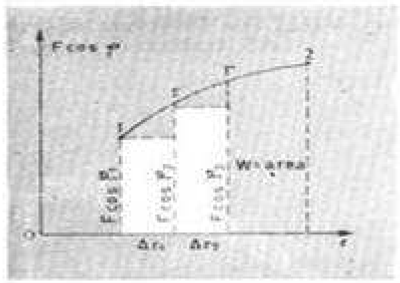
C. Gravitatorio (I):Revisión del concepto de trabajo



Representación gráfica del trabajo de una fuerza constante



Representación gráfica del trabajo

- El trabajo, se define como el producto escalar de la fuerza por el espacio recorrido. Según la definición de producto escalar, el trabajo se puede definir como el producto de la componente de la fuerza en dirección del desplazamiento, por el propio desplazamiento. Ya que : $W = \vec{F} \cdot d\vec{s}. = F \cdot ds \cdot \cos\varphi.$

F cos φ, es la componente en dirección del desplazamiento.

Si la fuerza es constante :**W=Fcosφ(s_2-s_1).** Y representa el área del paralelogramo de la figura.

Si la fuerza no fuese constante, todo consiste en considerar trabajos elementales para desplazamientos elementales, en los que la fuerza podamos considerarla constante, y donde

$d\vec{s} \to d\vec{r}$; y el trabajo elemental será : $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

El trabajo finito entre 1 y 2, será la suma de los infinitos sumandos diferenciales (La integral) :

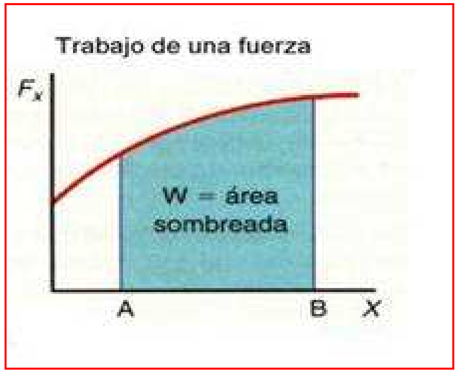
$W = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$. Si $\Delta\vec{r} \to 0$ entonces los rectángulos tienden a los trapecios, y el trabajo total viene dado por el área bajo la curva.

Para una curva, a lo largo de la cual, actúa la fuerza se escribe : $W = \oint_l \vec{F} d\vec{r}$

Que en matemáticas, se denomina, circulación de F a lo largo de l. Con lo que podré ***definir el trabajo: como la circulación del vector fuerza a lo largo de la trayectoria seguida por la partícula***

Campo gravitatorio (II), Introducción (I), teorema de las fuerzas vivas, idea de campo escalar y vectorial

- El trabajo realizado por una fuerza, en un desplazamiento A-B, se define como $W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$;F_1(componente en dirección del desplazamiento)



Teorema de las fuerzas vivas

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \int_A^B m\vec{v}.d\vec{v} =$$

$$\text{Teniendo en cuenta que}: m\vec{v}.d\vec{v} =$$

$$\tfrac{1}{2} m 2\vec{v}.d\vec{v} = \tfrac{1}{2} md\left(\vec{v}.\vec{v}\right)$$

$$\int_A^B d\left[\tfrac{1}{2} mv^2\right] = 1/2mv_B^2 - 1/2mv_A^2;$$

$$W = E_{CB} - E_{CA} = \Delta E_C$$

El trabajo realizado por la fuerza resultante, se emplea en variar su energía cinética

El significado del trabajo en física, parece no coincidir con lo que se entiende en el lenguaje corriente, pues en física, no hay trabajo si no existe desplazamiento; pero si sujeto un cuerpo, a determinada altura ,o empujo un objeto sin desplazarlo, considero que estoy realizando un trabajo, en el lenguaje corriente. Lo que ocurre, es que en esta situación, son los músculos de fibra estriada los que realizan el trabajo, con contracciones y relajaciones sucesivas.

Llamamos campo, a toda perturbación real o ficticia del espacio, determinada por la asignación a cada punto, del valor de una magnitud .

Los campos pueden ser: **escalares y vectoriales,** según que la magnitud que se asigna a cada punto del campo, sea un escalar o un vector:

Ejemplos :La superficie de una plancha caliente, es un campo escalar de temperaturas . Las velocidades de las moléculas de un gas en le interior de un recipiente, es un campo vectorial de velocidades. La presión en cada punto de la superficie, es un campo escalar

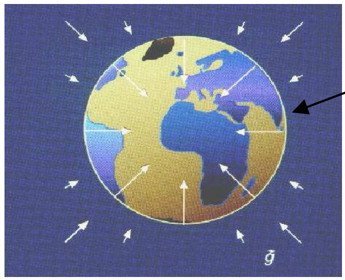
Campo. Gravitatorio (III) ;Introducción (II): campos de fuerzas

- Muchos cuerpos, interaccionan sin estar en contacto, la fuerza entre el Sol y la Tierra, entre dos carga eléctricas, o entre dos imanes . Esta interacción de fuerzas a "distancia" se explica mediante la idea de campo.
- Una masa, o carga, o imán, crea una perturbación en el medio que lo rodea, que no se pondrá de manifiesto hasta la introducción de una nueva masa, carga o imán .
- En esa región del espacio tendremos definido un campo vectorial $\vec{A}$ cuando la magnitud, depende exclusivamente de las coordenadas de cada punto en esa región ; se escribe $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$
- Si esa magnitud, es una velocidad, será un campo de velocidades, si fuese un fuerza, sería un campo de fuerzas .
- El campo gravitatorio, es un campo de fuerzas .
- El campo gravitatorio, es un **campo de fuerzas centrales** ***,por que todas las líneas de acción de las fuerzas del campo, convergen en el mismo punto llamado, centro del campo.***
- De un campo de fuerzas, se dice que es **conservativo,** cuando el trabajo que realizan las fuerzas del campo, para trasladar una partícula de un punto A, a otro B, ***solo depende de los puntos inicial y final , y no del camino recorrido***.
- Según el apartado anterior, en un campo de fuerzas conservativo, debemos pensar que el trabajo que realiza el campo **a lo largo de un ciclo cerrado es cero**

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \text{trabajo a lo largo del ciclo ABA} = \text{Trabajo por I} + \text{Trabajo por II}$$

$$= \left[\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}\right]_I + \left[\int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{r}\right]_{II} = (\text{solo depende de las posiciones A y B}) =$$

$$= \left[\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}\right]_I - \left[\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}\right]_{II} = 0$$



El Campo gravitatorio, es central

Campo. Gravitatorio (IV):Introducción (II): energía potencial, **carácter conservativo de una fuerza central**

- En campos conservativos, podré definir una magnitud, que llamaré **ENERGÍA POTENCIAL**, de tal manera que, *la variación de esta magnitud entre los puntos inicial y final coincida con el trabajo realizado por las fuerzas conservativas del campo.*

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{PA} - E_{PB} = -\Delta E_P$$

- Es una forma de energía, en que se almacena el trabajo realizado contra las fuerzas conservativas .
- Según la naturaleza de la fuerza conservativa, la E_P, podrá ser elástica, gravitatoria, eléctrica.....
- Su origen es arbitrario, solo tienen sentido físico, su variación.
- El nombre de fuerzas conservativas, se debe a que, si sobre un cuerpo solo actúan fuerzas de esta naturaleza , su energía mecánica se conserva constante*($E_{CA}+E_{PA}=E_{CB}+E_{PB}$)*

¿Toda fuerza central es conservativa?:

Las fuerzas de m sobre m', son radiales y dirigidas hacia m. Cualquier camino de A a B, podrá descomponerse en suma de arcos y desplazamientos radiales .

Veamos el trabajo para pasar m', de A a B

El trabajo que realizan las fuerzas del campo por el arco de circunferencia, es nulo, por que la fuerza es perpendicular al desplazamiento, y su producto escalar nulo. Solo nos quedará el trabajo realizado en sentido radial, que es igual para todos los caminos que se elijan entre A y B. Por tanto un campo de fuerzas centrales es conservativo(***trabajo independiente del camino)***

C Gravitatorio (V): Leyes de Kepler

LEYES DE KEPLER:
Recordemos que la conservación del momento angular, advertía que si sobre un cuerpo no actúan fuerzas exteriores , su momento angular permanece constante. Además se verifica, que si sobre ese mismo cuerpo actúan fuerzas externas, de tal forma que el momento de las fuerzas sea ***nulo,(caso de las fuerzas centrales, en donde f y r son paralelos)* entonces, El momento angular (*L*) permanece constante:**

La conservación del momento angular, implica que se han de conservar su módulo, su dirección y su sentido; de ello se deducen unas consecuencias transcendentales:

Si L conserva su dirección, la trayectoria de la partícula ha de encontrarse siempre en el mismo plano.

Si L conserva su sentido; implica que la partícula recorre su trayectoria siempre en el mismo sentido.

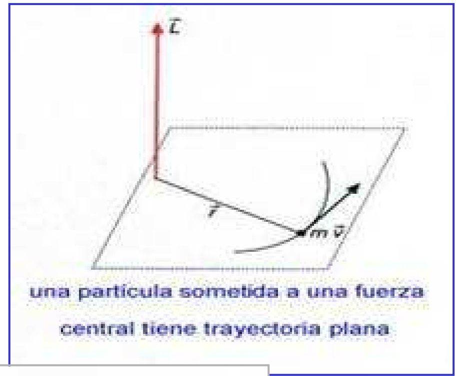
Si L conserva su módulo, resulta que el vector de posición de la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales; lo que quiere decir que su Velocidad Areolar es constante, es decir:

Leyes de Kepler:

1ª Ley : *Los planetas, en su movimiento alrededor del sol, describen trayectorias planas, cerradas de forma elíptica en uno de cuyos focos está el Sol*.

2ª Ley *El radio vector que une el planeta al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales(la velocidad areolar es constante)* El producto vector es el área del paralelepípedo formado por los dos vectores

3ª Ley: Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas alrededor del sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores. $T^2 = Cte.R^3$.



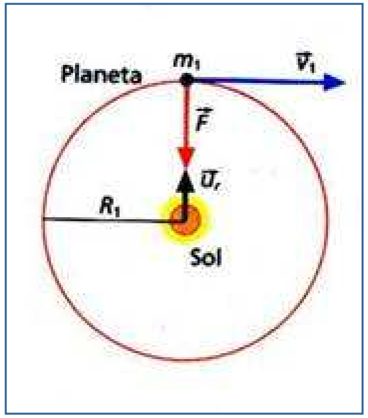
$$d\vec{A} = \tfrac{1}{2}\left|\vec{r}\times d\vec{r}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}dt\right| = \tfrac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|dt$$

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\times m\vec{v}\right| = \left|\vec{r}\times\vec{v}\right|m.$$

$$dA = \tfrac{1}{2}\frac{\left|\vec{L}\right|}{m}dt \Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}\frac{\left|\vec{L}\right|}{m}.(cte.)$$

Que es lo mismo que decir que la vel. Aerolar es constante

Campo Gravitatorio (VI): Ley de gravitación Universal



Todos los cuerpos del universo, se atraen entre si con una fuerza que es; directamente proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros.

- Vamos a suponer que las órbitas de Kepler, tienen una excentricidad despreciable, y por tanto, podremos considerarlas circunferencias
- .En tales circunstancias $\vec{v}_1 = cte.$
- y existe una $a_n = \frac{v_1^2}{R_1}$
- producida por una fuerza central $F_{S1} = m_1 \cdot \frac{v_1^2}{R_1}$

Pero $2\pi R_1 = v_1 T_1$; con lo que; $v_1 = \frac{2\pi R_1}{T_1}$

Es decir:

$F_{S1} = m_1 \frac{4\pi^2 R_1^2}{R_1 T_1^2}$; si multiplico y divido por R_1; tendré; $F_{S1} = m_1 \frac{4\pi^2 R_1^3}{R_1^2 T_1^2}$;

Si ahora tengo en cuenta la tercera ley de Kepler, y $F_{S1} = K_S \frac{m_1}{R_1^2}$ (K_S; es una constante para todos los planetas que depende del sol.).

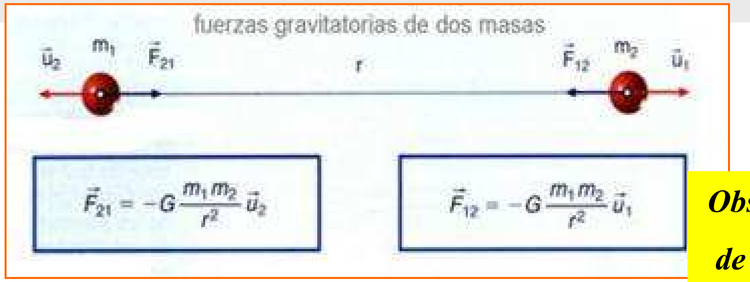
Teniendo en cuenta el principio de acción y reaccion y, razonando de forma análoga, aparecerá una $F_{1S} = K_1 \frac{m_S}{R_1^2}$, y por tanto, aplicando esto a los demas planetas e igualando todas las fuerzas, podré escribir : $\mathbf{F_{S1}=F_{1S}} \Rightarrow$ $\frac{K_s}{m_s} = \frac{K_1}{m_1} = \frac{K_2}{m_2} = \dots\dots = G$

De donde : $F_{1S} = F_{S1} = G \frac{m_1 m_s}{R_1^2}$

Pero F y R tienen sentidos contrarios; de lo que debo escribir: $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_S}{R_1^2} \vec{u}_r$

Campo gravitatorio (VII), caracterización del campo (I): Las fuerzas

- Son fuerzas a distancia(no precisan de un medio material entre ambas masas para que las fuerzas actúen).
- Siempre se presentan por parejas, las masas se atraen entre si, con el mismo módulo y dirección pero de sentidos opuestos. Son de Acción y reacción
- Su módulo es: $F=G.m_1m_2/R^{2.}$
- Su dirección, es la de la recta que une ambos centros de las masas.
- El sentido, es del segundo al primer cuerpo.



Observar el sentido de ambos vectores unitarios

•El campo gravitatorio terrestre, es un caso particular de la gravitación universal, referido a la tierra.

•Llamamos campo gravitatorio, a un vector, que en cada punto del espacio, es igual a la fuerza de atracción Newtoniana, ejercida por una masa sobre otra.

•El campo gravitatorio es **ESTACIONARIO** (no cambia con el tiempo, es solamente una función de punto)

•El campo gravitatorio es **conservativo**. La fuerza gravitatoria cumple:

$$W = \oint \vec{F}.d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_A} -G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}\cdot\vec{u}_r\cdot d\vec{r} = G.M.m.(1/r)\Big]_{r_A}^{r_A} = 0$$

El valor de $G=6{,}67.10^{-11}N.m^2/kg^2$. Es un valor experimental, constante universal

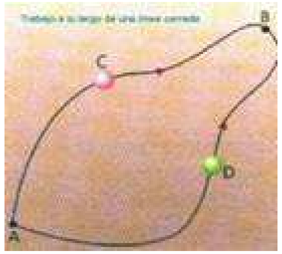
Aunque tal conclusión, se puede extraer sin mas que evidenciar que el campo gravitatorio es un campo de fuerzas centrales, y por lo tanto conservativo.

Campo Gravitatorio (VIII):Caracterización del campo gravitatorio (II), el campo conservativo y la energía potencial

(*Para recordar*).El trabajo realizado por la fuerza conservativa, (recordar que:las fuerzas conservativas restituyen la energía empleada en vencerlas) entre dos puntos, puede expresarse como la ***variación de cierta magnitud*** (que llamaremos ***energía potencial***) entre los puntos inicial y final.

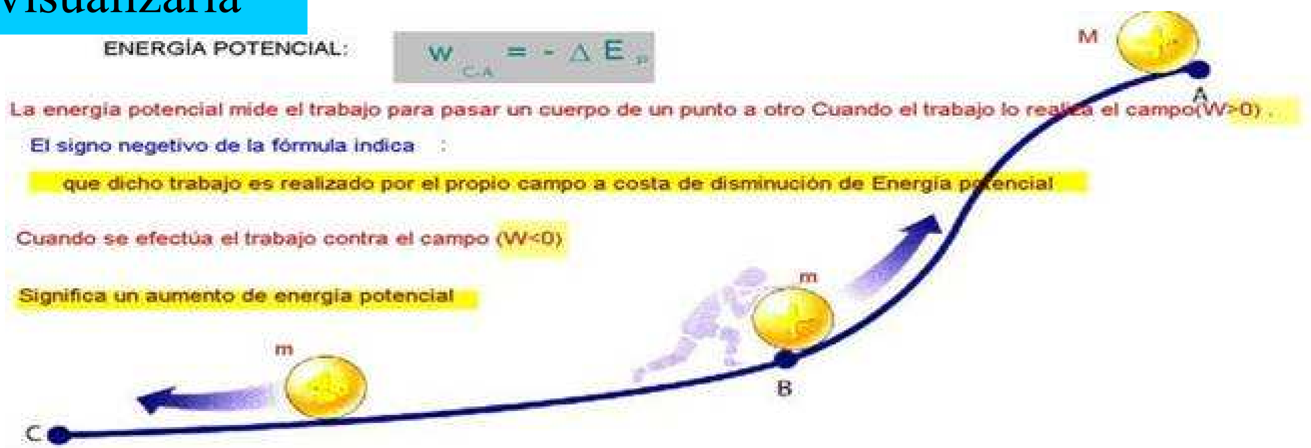
Otra forma de verlo***:Una fuerza es conservativa; si el trabajo realizado en contra de ella, se almacena en forma de energía potencial***

Cuando las fuerzas son conservativas, a cada punto de la trayectoria que sigue la masa en su desplazamiento por el campo, se le asocia un escalar llamado ***Energía potencial*** ***Como las fuerzas gravitatorias son centrales, necesariamente han de ser conservativas***



$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = E_{PA} - E_{PB} = -\Delta E_P$$

Para visualizarla



$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\dfrac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r}{m} = -G\frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r \, (M = \text{masa de la Tierra})$$

- La intensidad del campo "**g**", en un punto del espacio, es la fuerza que actuaría sobre la unidad de masa situada en ese punto, o bien, ***es la fuerza, que la masa creadora, ejerce sobre la unidad de masa en ese punto***
- Es obvio, que el campo gravitatorio es radial, y disminuye con el cuadrado de la distancia. *SE TRATA DE UN CAMPO CENTRAL*
- Las fuerzas gravitatorias, son siempre *atractivas,* disminuyen con el cuadrado de la distancia

Campo gravitatorio (X): Caracterización del campo (IV); líneas de fuerza (I)

•El campo gravitatorio, quedará determinado, para cada punto del espacio, mediante dos magnitudes características :

•**La fuerza**, que el campo puede ejercer sobre una masa m colocada en ese punto.

•**El trabajo**, que esta fuerza puede realizar.

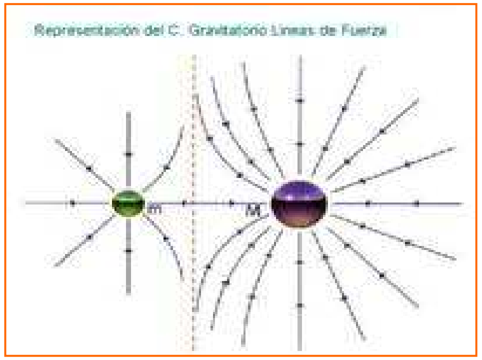
•Si esta masa m, que llamaremos “de Prueba”, vale **la unidad;** entonces estas dos magnitudes características se llaman respectivamente:

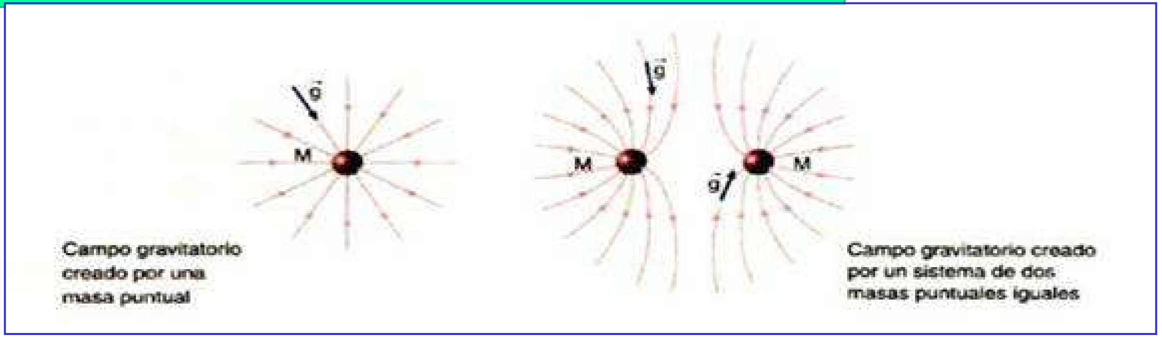
• ***INTENSIDAD DEL CAMPO*** (SIMPLEMENTE CAMPO), Y; ***POTENCIAL***

•Otra de las características del campo, son las ***líneas de fuerza,(L de F)*** que nos permiten visualizarlo. Gozan de las siguientes propiedades:

•Son las trayectorias que seguiría, la masa sometida a la influencia del campo, en una sucesión de caminos elementales, partiendo en todos ellos, del reposo

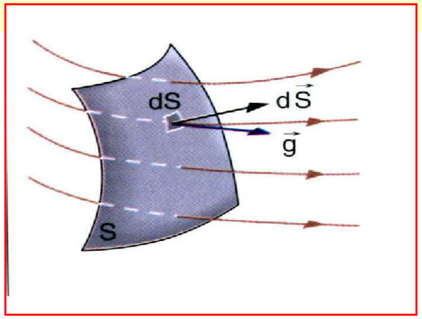
•El vector intensidad del campo, es siempre tangente a las líneas de fuerza





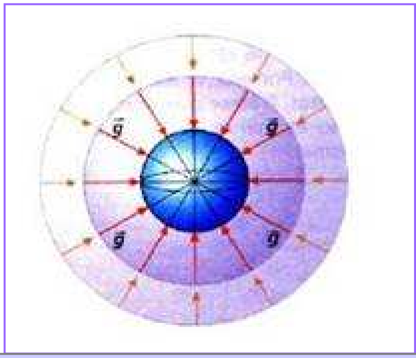
Campo gravitatorio (XI): Caracterización del campo (V) ; Líneas de fuerza (II)

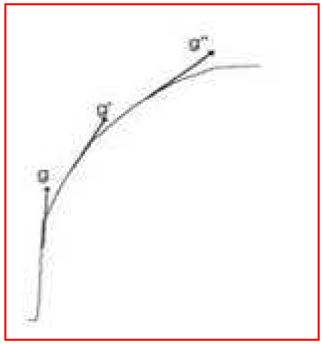
•Para representar el campo, se conviene en asociar su valor en un punto, al número de líneas de fuerza que atraviesan la unidad de superficie.



•Pueden ser cerradas(Campo Magnético), y abiertas(campo gravitatorio y campo eléctrico).

•El sentido de recorrido de las L de F, y el vector que representa el campo coinciden en cada punto.





Las líneas de fuerza no se pueden cortar, pues si así fuese, a cada punto del espacio podrían corresponder dos o mas valores de “g”, con lo que el campo no estaría unívocamente determinado. (recordemos que es una función de las coordenadas del punto y por tanto posee un valor único para cada punto del campo)

Campo gravitatorio (XII):Flujo del campo gravitatorio

- El campo gravitatorio en un punto, conviene en representase, por el ***número de líneas de fuerza que atraviesan normalmente la unidad de superficie*** localizada en ese punto.
- Si las líneas de representación son paralelas, el campo es uniforme
- En los puntos o zonas donde la L. de F. se juntan, el campo es mas intenso.
- **Se define FLUJO del campo a través de una superficie elemental, como el número de líneas de fuerza que atraviesan esa superficie**; su valor es el producto de la intensidad del campo por la superficie Normal al campo

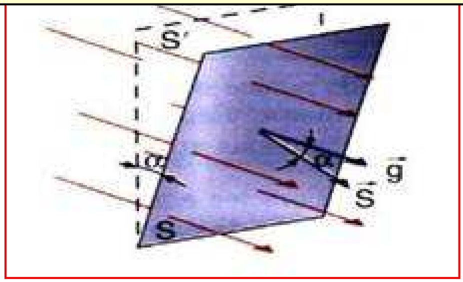
Si dΦ es el flujo elemental que atraviesa dS, escribiré:

$d\Phi = \vec{g} \cdot d\vec{S} = g \cdot dS \cdot \cos\alpha$

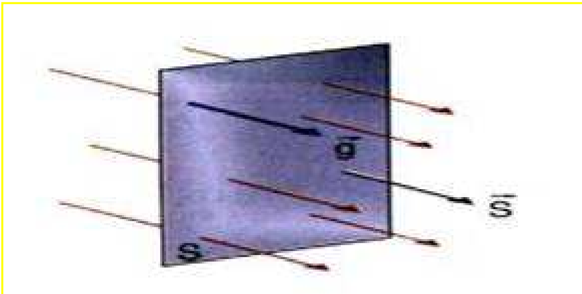
y el flujo através de una superficie finita :

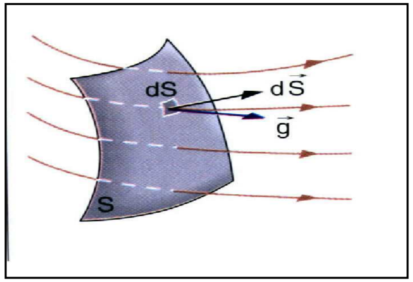
$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_S g \cdot dS \cdot \cos\alpha$

Campo uniforme; superficie que forma un ángulo α



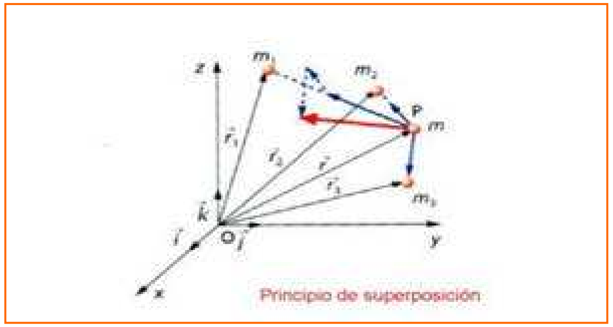
Campo uniforme y superficie plana normal al campo

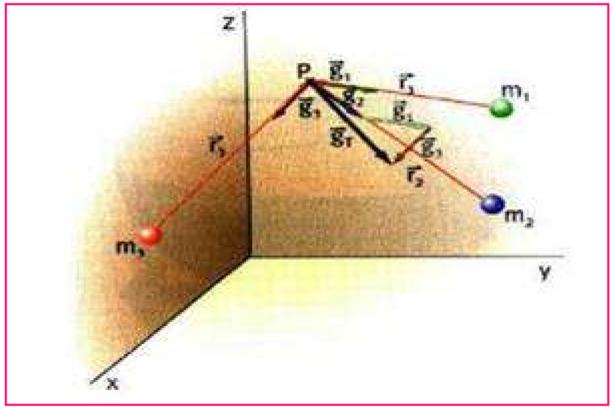




Superficie cualquiera y campo variable

Campo gravitatorio XIII: Principio de superposición





***PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN*:**

La intensidad del Campo gravitatorio en un punto, debida a la acción de varias masas puntuales, es la suma vectorial de las intensidades, que individual e independientemente, crean en cada punto, cada una de las masas

- Según el principio de independencia de las fuerzas, cuando un cuerpo está sometido a la acción de varias fuerzas, el efecto resultante es igual a la suma de los efectos que experimentaría, si estuviera sometido a cada una de las fuerzas individuales.
- Una distribución discreta de masas puntuales (m_1,m_2,m_3.....m_n), es un conjunto de puntos materiales que pueden contarse. Discreto se opone a continuo. En una distribución continua no se puede hablar de dos puntos consecutivos; es decir dados dos puntos cualesquiera , entre ellos existen infinitos puntos.
- Si tengo una distribución discreta de masas (m_1,m_2,m_3.....m_n),que ocupan las posiciones dadas por los vectores (**$\mathbf{r}_1$,$\mathbf{r}_2$,$\mathbf{r}_3$,.....$\mathbf{r}_n$**.), la fuerza ejercida por el conjunto de todas ella sobre una masa puntual m, situada en una posición P, definida por el vector **r, es :**

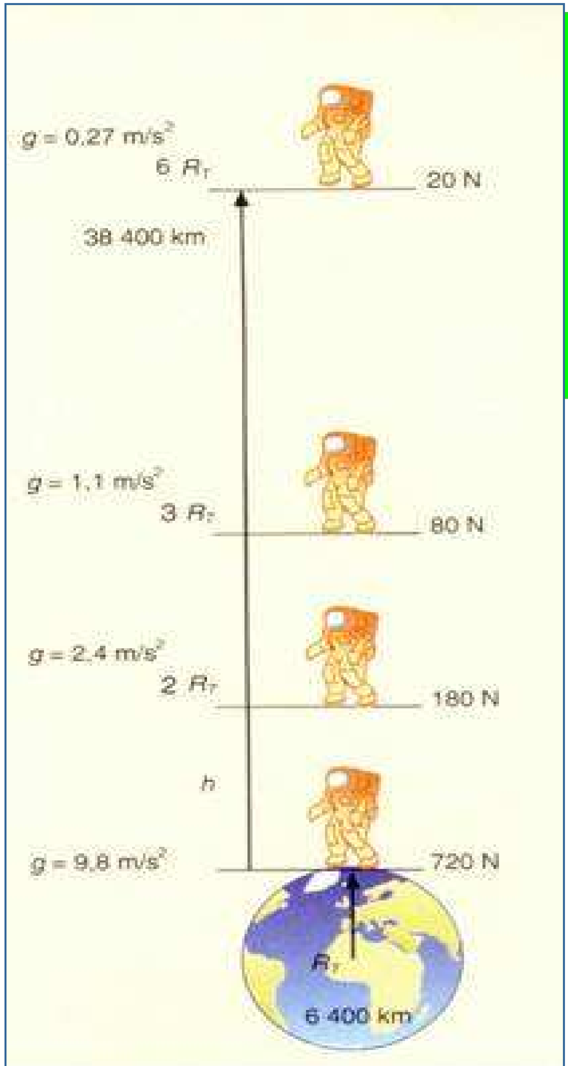
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i ; \quad F_i \text{ es la fuerza ejercida por } m_i \text{ sobre } m.$$

$$\text{y la intensidad del campo será : } \vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{F}}{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i$$

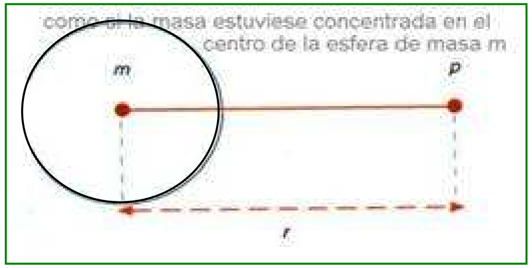
Campo gravitatorio XIV;Variaciones de **g** con la altura

El campo gravitatorio depende de la distancia desde el centro del punto que lo origina, hasta el punto que se considere.

En el exterior: en general, el campo gravitatorio originado por un cuerpo esférico uniforme de masa m en un punto, es el mismo que el que originaría dicha masa si estuviese concentrada en el centro del cuerpo



Variación de la gravedad con la altura



$\vec{g} = -G\dfrac{m}{r^2}\vec{u}_r$; para el caso de la tierra el campo es máximo al nivel del mar, r = R_T

la relación modular para este caso es :

$g_0 = G\dfrac{M_T}{R_T} = 9{,}8\,m/sg^2$; Obviamente con la altura h, tendré que :

$g_h = G\dfrac{M_T}{(R_t + h)^2}$; Para relacionar lo con g_0, divido las últimas expresione s :

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{G\dfrac{M_T}{(R_t+h)^2}}{G\dfrac{M_T}{R_T}} = \frac{R_T^2}{(R_t+h)^2} \Rightarrow g_h = g_0\frac{R_T^2}{(R_t+h)^2}$$

Campo gravitatorio XV: Campo en el interior de la superficie terrestre

Para el caso del interior de la tierra:
Debemos de hacer dos consideraciones :
La gravedad se debe a la masa de la tierra por debajo de p
La densidad de la tierra la supondremos constante

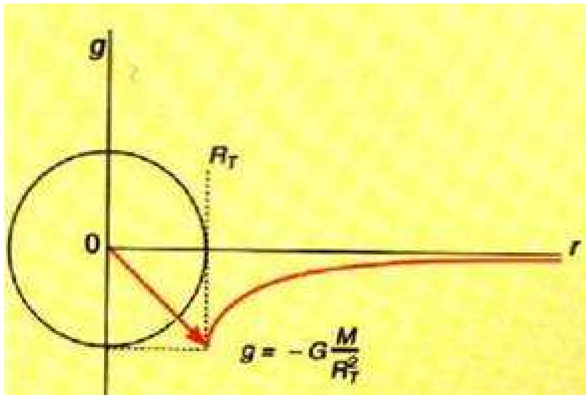
$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} = G\rho_T \cdot \frac{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R_T^3}{R_T^2} = G\rho_T\ \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R_T$$

$$r = R_T - p(p = profundidad)$$

$$g = G\frac{m}{r^2} = G\rho_T \cdot \frac{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3}{r^2} = G\rho_T\ \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r\ .\text{Si ahora divido ambas:}$$

$$g = g_0\ \frac{r}{R_T}$$

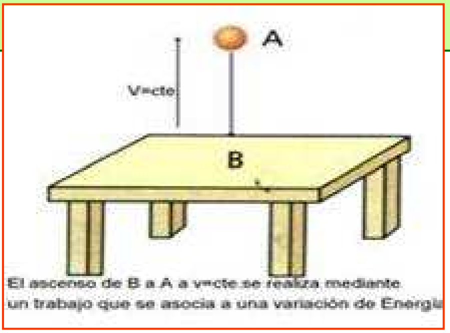
En la figura, se representa la variación del campo gravitatorio en el interior y exterior de la superficie terrestre. Partiendo de cero en el interior del planeta,(pensemos que la contribución de masa es nula) el módulo de la intensidad aumenta hasta llegar al máximo en la superficie, a partir de donde disminuye con el cuadrado de la distancia hasta hacerse cero en el infinito



Al ser negativo g se sitúa por debajo del eje OX

Campo gravitatorio XVI: Energía potencial

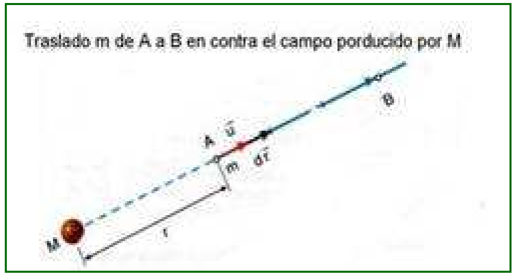
- Para recordar:
- Un campo de fuerzas centrales es conservativo
- En un campo conservativo, decíamos que el trabajo solo depende de los estados inicial y final y no del camino recorrido.
- Analicemos el punto de partida:
- Supongamos que se deja caer verticalmente un cuerpo desde el punto A al punto B . Partiendo de la idea de que ***SIEMPRE QUE SE REALIZA UN TRABAJO SE HA PRODUCIDO EN IGUAL CANTIDAD UNA VARIACIÓN DE ENERGÍA.***
- El cuerpo cae, y el campo gravitatorio terrestre realiza un trabajo W. La transformación de energía correspondiente nos la proporciona el teorema de las fuerzas vivas:
- $W_{AB}=\Delta E_C=E_{CB}-E_{CA.}$
- Ahora se trata de subir el cuerpo de B a A a v=cte.. No hay variación de E_C, pero si ha habido trabajo, y por tanto una variación de energía.
- A esta nueva energía la llamaremos energía potencial $W_{AB}= -\Delta E_P= -W_{BA}(1)$
- Podré, por lo tanto escribir:
- $\Delta E_C=E_{CB}-E_{CA.}= - -\Delta E_P= - (E_{PB} – E_{PA})$, es decir :$\underline{E_{CA}+E_{PA}=E_{CB}+E_{PA}}$; que es en definitiva, ***el principio de conservación de la energía***
- La energía potencial, sólo puede definirse en campos conservativos
- La Energía potencial, mide el trabajo necesario para trasladar un cuerpo de un punto a otro. ***Cuando el trabajo lo realiza el campo es positivo(W>0).*** El signo negativo de la ecuación (1) indica que el trabajo es realizado por el propio campo a costa de la disminución de su energía potencial. ***Cuando el trabajo es realizado por agentes externos contra el campo (W<0)*** significa un aumento de energía .
- De la definición, se deduce que solo pueden ser medidas diferencias de energía, y no valores absolutos de energía potencial en un punto . Aunque siempre podremos elegir “*Arbitrariamente* “ un **nivel cero** de energía potencial . En general,lo elegimos **suficientemente alejado** del centro del campo para que dejen de notarse los efectos de este , es decir, **el infinito (∞)**



La energía potencial gravitatoria es siempre negativa, esto se explica por que el trabajo que **realiza el campo,** es igual a la **disminución** de energía potencial. Por tanto, si inicialmente, una masa libre de la acción gravitatoria tiene E_P=0. Al introducirse en el C. Gravitatorio, su E_P se hará negativa

Campo gravitatorio XVII Energía potencial gravitatoria II

- Vamos a encontrar el Valor de la Energía potencial gravitatoria.
- El campo es conservativo , lo que implica que :



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_P;$$

$$E_{PA} - E_{PB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{r}.$$

El trabajo no depende del camino ; escogemos una trayectoria radial para simplificar cálculos

$$\vec{u}_r \cdot d\vec{r}. = u_r \cdot dr \cdot \cos 0^\circ = dr; \quad \text{por lo tanto} : E_{PA} - E_{PB} = -GMm \int_A^B \frac{dr}{r^2} = -GMm \left[-\frac{1}{r}\right]_A^B.$$

$$E_{PA} - E_{PB} = \left(-\frac{GMm}{r_A}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_B}\right).$$ Si identificamos ambos miembros de esta igualdad tendré :

$$E_{PA} = \left(-\frac{GMm}{r_A}\right) \quad \text{y} \quad E_{PB} = \left(-\frac{GMm}{r_B}\right)$$

Parece lógico asignar un valor cero de energía potencial un punto tan alejado del campo que no se notan los efectos de este . A este punto le llamaremos el infinito $r \to \infty$

Podré entonces definir la energía potencial en un punto del espacio A si

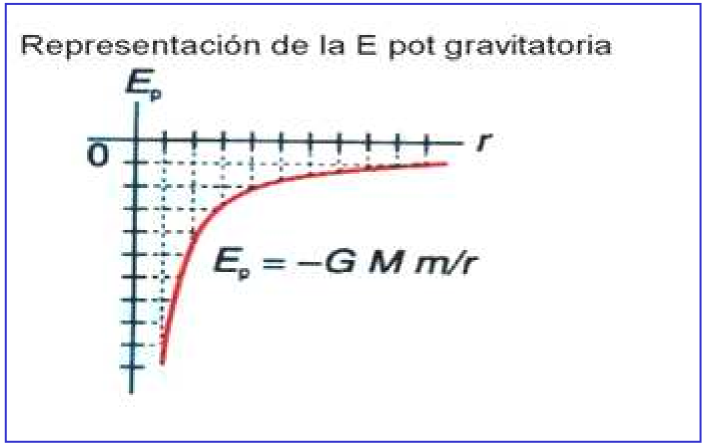
$r_B \to \infty$ con lo que nos quedará :

$$E_{PA} = -\frac{GMm}{r_A} \text{ o en general} : \left\{ E_P = -\frac{GMm}{r} \right\}$$

La energía potencial en un punto "p" es el trabajo necesario, contra las fuerzas del campo, para trasladar (a velocidad constante)la masa m, desde el punto hasta el infinito

Campo gravitatorio XVIII Algunas consideraciones sobre la energía potencial gravitatoria(III):

- ***La Energía potencial gravitatoria es siempre negativa***. Esto se explica por que el trabajo del campo (el que realiza el campo) es igual a la ***disminución*** de energía potencial.
- Pero cuidado : La energía potencial gravitatoria puede ser negativa o positiva dependiendo del origen del sistema de referencia considerado. Es decir que cuando utilizamos la expresión E_p=mgh, para puntos próximos a la superficie de la tierra la energía potencial tiene un valor positivo. Por el contrario, en la expresión E_p=-GMm/r la energía es negativa supone el origen de energías en el infinito Pero esta aparente contradicción conduce al mismo resultado porque si un cuerpo se aparta de la superficie terrestre, el valor de su energía aumenta al disminuir el cociente GMm/r, que <u>como es negativo aumenta en definitiva</u>.
- Otro punto de vista:
- La energía potencial gravitatoria de una masa m es el trabajo realizado por las fuerzas del campo para llevar la masa m desde el infinito al punto, cambiado de signo, $E_p = -W^P_{\text{infinito}}$ (hecho por las fuerzas del campo).
- La representación de la Energía potencial gravitatoria en función de la distancia E_p =f(1/r),=cte.1/r. Y la representación es:



Campo gravitatorio XIX: El Potencial gravitatorio

- Es un concepto clave en la descripción del campo gravitatorio. Representa la energía potencial por unidad de masa(1kg.) colocada en un punto del campo.
- De igual forma que esta, es un escalar

El trabajo para transpotar la unidad de masa de A a B sera :

$$\frac{W}{m} = \frac{\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}}{m} = \int_A^B \frac{\vec{F}}{m}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{g}\cdot d\vec{r}$$

A este trabajo le llamamos diferencia de potencial gravitatorio y se representa por

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{g}\cdot d\vec{r}$$

La diferencia de potencial gravitatorio entre los puntos A y B, es igual al trabajo realizado por el campo gravitatorio, para trasladar la unidad de masa de A a B.

D la misma forma que en el caso de la energía, carece de sentido hablar de valores absolutos de potencial, solo de diferencias de potencial . Aunque se puede asignar un valor cero de potencial fijando el origen de potenciales en el infinito.

Para el cálculo del potencial gravitatorio en un punto creado por la masa puntual M, tendré :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{g}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -G\frac{M}{r^2}\cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{r}.$$

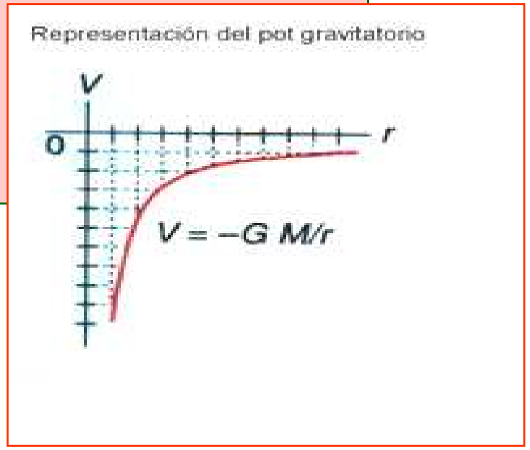
Elegimos trayectoria radial como en el caso de la ernegía, y tendremos, como allí :

$\vec{u}_r \cdot d\vec{r}. = u_r \cdot dr \cdot \cos 0° = dr.$ por tanto :

$$V_A - V_B = -GM\int_A^B \frac{dr}{r^2} = -GM\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = \left(-G\frac{M}{r_A}\right) - \left(-G\frac{M}{r_B}\right).$$

Fijemos el origen de potencial en el infinito. si $r_B \to \infty$

$$V_A = -G\frac{M}{r_A} \text{ y en general : } V = -G\frac{M}{r}$$



Defino, entonces el potencial gravitatorio en un punto p del campo, como el trabajo, **contra las fuerzas del campo**, necesario para llevar la unidad de masa desde el punto al infinito

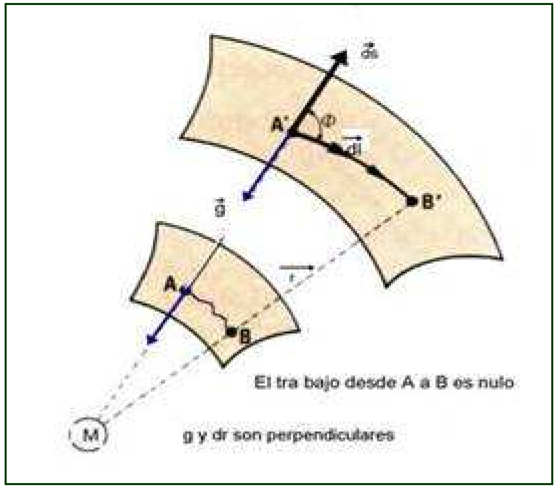
Campo gravitatorio XX: Consideraciones sobre el potencial ; superficies equipotenciales

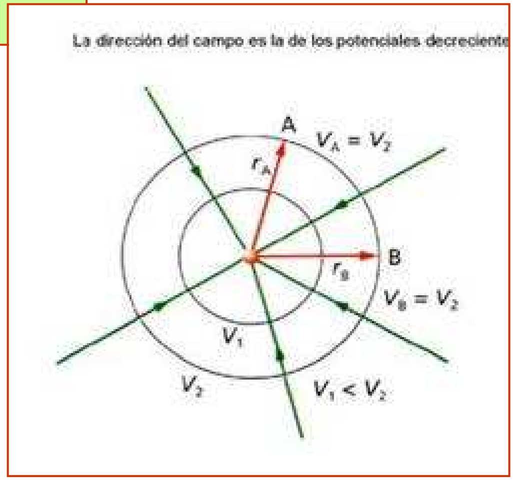
- Una vez definido el potencial, estamos en condiciones de representar el campo gravitatorio mediante las conocidas **líneas de campo** y lo que llamaremos **superficies equipotenciales,** que no son mas, que *el lugar geométrico de los puntos que tienen el mismo potencial* .
- Como el potencial es una función de punto, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno fijo(centro de la masa creadora del campo), es una **esfera**, con lo que las superficies equipotenciales, serán **esferas concéntricas** con este mismo centro, el de la masa originaria del campo gravitatorio.
- Sobre una superficie equipotencial, se verifica que el **trabajo** para trasladar una masa de un punto a otro **es nulo**:
- En efecto:

$$W_{AB} = E_P(r_A) - E_P(r_B) = mV_A - mV_B = m(V_A - V_B) = 0 \quad \text{Pues}: V_A = V_B$$

Además: encontraremos que $\vec{g}$ y la superf. equip. son perpendiculares

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{de lo que se deduce que}: \vec{F} \perp d\vec{r}$$



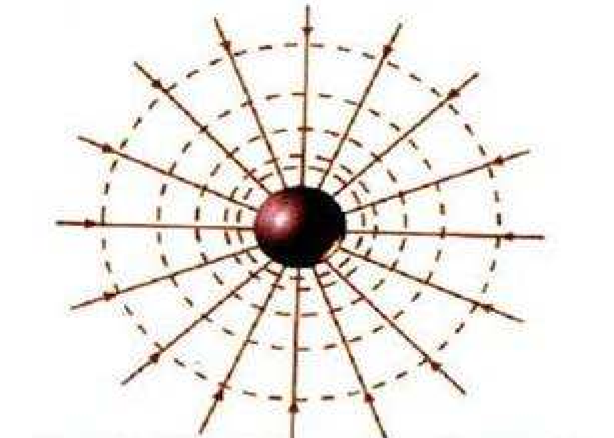


Campo gravitatorio XXI: Consideraciones sobre el potencial (II); superficies equipotenciales, principio de superposición

- Otra forma de verlo : si ***g***, no es perpendicular a la superficie equipotencial, debería existir una componente tangencial de ***g,*** y por tanto de ***F,*** con lo que W_{AB} no sería nulo, ya que existiría fuerza en la dirección del desplazamiento a lo largo de la superficie, y por tanto trabajo.
- El campo tiene el sentido de los potenciales decrecientes
- Esta afirmación se deduce del hecho de que; si la masa se mueve bajo la acción de las fuerzas del campo, realiza trabajo a expensas de su energía potencial, por lo que esta y su potencial disminuyen.
- Las superficies equipotenciales nunca podrán cortarse; si así fuese, en el punto o línea de corte, el potencial no estaría unívocamente determinado, (podríamos tener dos o mas valores del potencial para el mismo punto del campo, y hemos de recordar que es un escalar que depende de la distancia al punto)

Las líneas de fuerza, hemos de trazarlas de modo, que el vector ***g*** sea tangente en cada punto a las líneas de campo, y con el mismo sentido que estas.

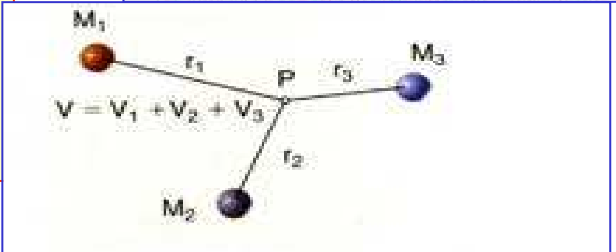
Si tenemos en cuenta los resultados anteriores, referidos a la perpendicularidad de ***g*** y la superficie equipotencial, y teniendo en cuenta que el potencial toma el mismo valor a la misma distancia, obligado es, **que las superficies equipotenciales sean esferas concéntricas**



Superficies equipotenciales normales a las L F

En el caso de existir varias masas puntuales se cumple el ***principio de superposición:***

El potencial gravitatorio resultante es la suma de los potenciales debidos a cada una de las masas



- Utilizaremos el teorema de Gauss, para calcular el campo que produce, un un determinado volumen o superficie, pero exclusivamente, en casos donde la distribución de masa presente cierta simetría, como esferas, cilindros, planos etc...
- Veamos un ejemplo que nos permita visualizar el teorema de Gauss.
- Se trata de calcular, el flujo del campo gravitatorio de una masa puntual M, a través de una esfera de radio R centrada en M.

$\Phi = \int_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = \int_S -G\frac{M}{R^2}\cdot\vec{u}_r\cdot d\vec{S} = -G\frac{M}{R^2}\cdot\int_S \vec{u}_r\cdot d\vec{S}$: Sobre la esfera

el valor de r es constante, e igual a R. El vector unitario $\vec{u}_r$, y el vector representa tivo

de la superficie (normal y hacia afuera de ella) $d\vec{S}$, son paralelos, por tanto :

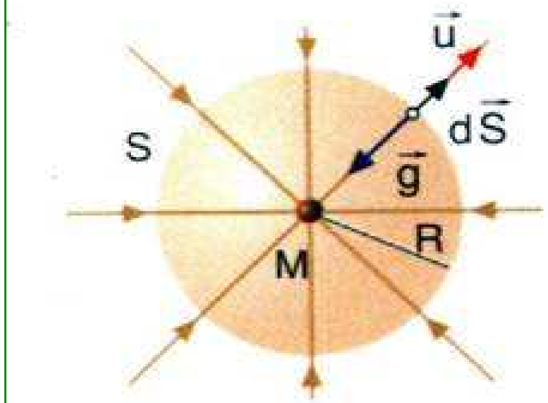
$\vec{u}_r\cdot d\vec{S} = u_r\cdot dS\cdot\cos 0^{o} = dS$; por lo tanto $\Phi = -G\frac{M}{R^2}\cdot\int_S dS = -G\frac{M}{R^2}\cdot S$

Pero $S = 4\cdot\pi\cdot R^2$ por lo que en definitiva : $\{\Phi = -4\pi\cdot G\cdot M\} =$

El flujo gravitatorio a través de una superficie cerrada, es proporcional a la masa M que encierra dicha superficie.

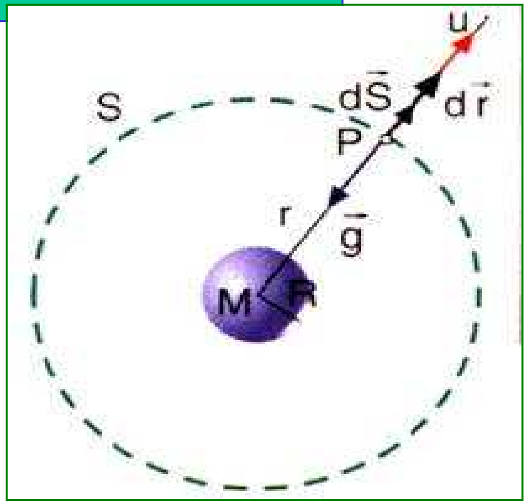
En general, si la superficie es cerrada, el flujo total es positivo, si las líneas de fuerza salen de la superficie.

En el caso del campo gravitatorio Φ<0, ya que ***g*** y ***ds*** forman un ángulo de 180º y su coseno es -1



Campo gravitatorio XXIII: Aplicaciones del teorema de Gauss (I)

- Para calcular el campo y el potencial, creados por una esfera maciza y homogénea de radio R en un punto P, exterior, podremos aplicar el teorema de gauss, eligiendo como superficie Gaussiana, una esfera concéntrica con la distribución de masa, y que pasa por el punto P, donde queremos calcular el campo.
- **Por simetría,** el campo ***g*,** es perpendicular a la superficie gaussiana en todos los puntos, y su módulo constante sobre la superficie.



$$\vec{g}\cdot d\vec{S} = g\cdot ds\cdot\cos 180^{\circ} = -g\cdot dS$$

$$\Phi = \int_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = \int_S -g\cdot dS = -g\int_S dS = -g\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2$$

Si ahora aplico el teorema de Gauss, tendré:

$\Phi = -4\cdot\pi\cdot G\cdot M = -g\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2$; y por lo tanto $g = G\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^2}$

en forma vectorial: $\vec{g} = -G\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^2}\vec{u}_r$: y para el potencial procediendo de la misma forma:

$$V = \int_r^{\infty}\vec{g}\cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} -G\frac{M}{r^2}\cdot\vec{u}_r\cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} -G\frac{M}{r^2}\cdot dr = -G.M\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = -G\frac{M}{r}$$

$$\begin{pmatrix} recordemos \\ d(1/r) = -1/r^2 \end{pmatrix}$$

Campo gravitatorio XXIV: Aplicaciones del teorema de Gauss(II) campo gravitatorio en el interior de la Tierra

- Aplicaremos el teorema de Gauss, para calcular el campo gravitatorio en el interior de la tierra .
- El problema, fue resuelto en su momento por otro camino.
- En estos momentos, y teniendo en cuenta la simetría de la superficie, estamos en condiciones de aplicar el teorema de Gauss.
- La superficie gaussiana elegida es una esfera, (en verde oscuro en el dibujo) concéntrica con la superficie de la Tierra. Suponemos, como entonces, que la densidad es constante.

$$\Phi = \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \oint_S g \cdot dS \cdot \cos\pi = -g\oint_S dS = -gS = -g4\cdot\pi\cdot r^2$$

Por otro lado: $\Phi = \text{-}4\cdot\pi\cdot \mathrm{GM}_{\text{radio r}}$

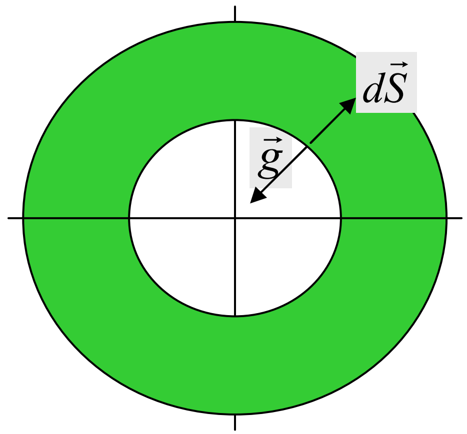
$\mathrm{M}_{\text{radio r esfera interior}} = \rho\cdot \mathrm{V}_{\text{radio r interior}} = \rho\cdot 4/3\pi\cdot r^3 (\rho = cte.)$

Por tanto: $g4\pi r^2 = 4\pi\cdot G\cdot\rho\cdot 4/3\cdot\pi\cdot r^3$

Qu en definitiva: $g = \rho 4/3\pi\cdot Gr$

Valor que coincide con el obtenido por el otro método

Campo en el interior



Campo gravitatorio XXV: La energía potencial en la Tierra

- De lo que tratamos ahora, es de comprobar que la ecuación $\Delta E_P = m.g.h$ es correcta, partiendo de la conocida expresión de la energía potencial: $\boldsymbol{E_P = -GM_T m 1/r}$.
- Hasta ahora, hemos calculado la E_P de una masa m, en las proximidades de la superficie terrestre, mediante la $E_P = mgh$, según la cual $E_P = 0$, si $h = 0$; además, consideramos g constante a cualquier altura de la masa m

$$\Delta E_P = -\frac{GM_T m}{R_T + h} - \left(-\frac{GM_T m}{R_T}\right) = GM_T m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) = GM_T m \cdot \frac{R_T + h - R_T}{R_T (R_T + h)} =$$

$$= g_0 \cdot m \cdot \frac{R_T^2 h}{R_T (R_T + h)} = g_0 m \frac{R_T h}{R_T + h} = (\text{solamente, si h es} << \text{frente al } R_T) \text{podré poner } R_T + h \cong R_T$$

y en tal caso la expresión es correcta

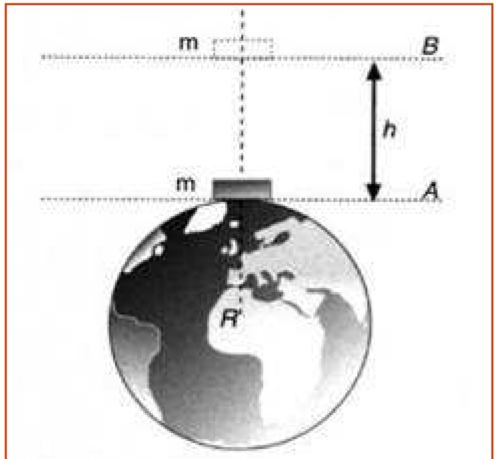
A medida que la masa de prueba, se aleja del centro del campo, su energía potencial aumenta, hasta que en el infinito, sería máxima. *Aunque la fórmula deducida no es válida, se trata de una extrapolación aceptable*.

El aumento de E_P, equivale al trabajo realizado por un agente externo.

En cualquier caso, E_P vale lo máximo en el infinito, independientemente del valor cero asignado al sistema de referencia

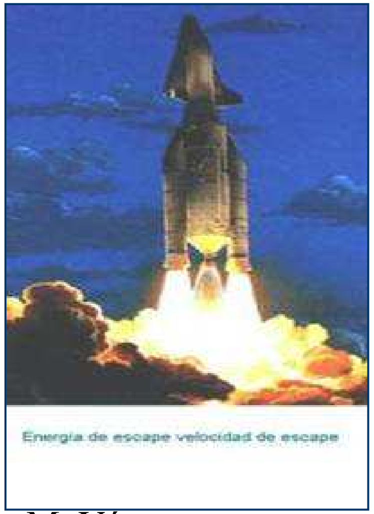
Para aplicar correctamente la fórmula $\boldsymbol{\Delta E_P = m.g.h}$ hay que tener presente :

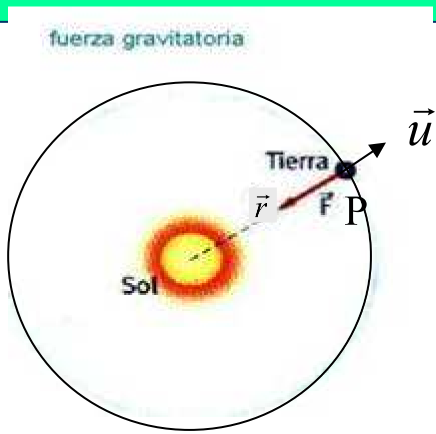
- Que solamente representa variaciones de energía . Por tanto solo tiene sentido, cuando se establece un nivel de referencia específico para cada caso.
- Que dicha fórmula solo vale, mientras la fuerza gravitatoria permanezca constante, es decir, mientras los desplazamientos sean pequeños comparados con el radio de la Tierra

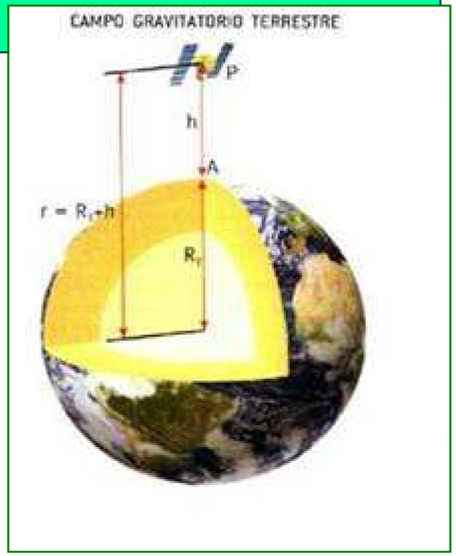


Comencemos por conocer algunas de las constantes que se utilizarán el la resolución de ejercicios correspondientes al movimiento de satélites : G(cte gravitación) =$6,67.10^{-11}$; M_T(masa tierra)=$5,98.10^{24}$kg.; R_T(radio tierra)=$6,37.10^{6}$m.. $r=R_T+h$; h=distancia al punto, P, desde la superficie. **u**= vector unitario que une el centro de la tierra con el punto, cuyo sentido es del centro de la tierra al punto, P

- Para poner en órbita un satélite artificial, hay que llevarlo hasta una altura h sobre la superficie empleando cohetes, con los cuales hemos de vencer la "***fuerza conservativa del campo***", por lo que siempre tendremos $E_{superficie}=E_{altura\ h.}$
- Para poner en órbita un satélite, necesitaremos la energía necesaria para situarlo a la altura h mas la que tendremos que comunicar para dotarlo de la velocidad suficiente para mantenerlo en la órbita, y además de todo ello, la necesaria para vencer la resistencia del aire, pero en todo el estudio consideraremos nulos los rozamientos







Campo gravitatorio XXVII: Movimiento de satélites y planetas (II)

- **Definimos velocidad de escape (V_L),** a la velocidad mínima de lanzamiento de un cohete, para que pueda librarse de la atracción terrestre.
- **Los valores de la energía**, en superficie, y en el punto de altura **h**, han de ser iguales, estamos en un campo conservativo.
- **Periodo de revolución de un satélite**, es el tiempo que tarda en completar una órbita. Coincidirá con el periodo encontrado por Kepler
- **Velocidad orbital**, es la necesaria a imprimir al satélite, una vez que se encuentra en la órbita, para que permanezca en ella contrarrestando la acción gravitatoria.
- **Energía de enlace**, es la energía mecánica que debe poseer un satélite, para mantenerse en una órbita estacionaria, a una altura **h,** sobre la superficie.
- **Satélite geoestacionario**, es el que gira alrededor de la tierra, con un periodo de revolución, igual al de esta

Las energías, en superficie, y a la altura h, han de ser iguales

$$E_{\sup} = E_{c\sup} + E_{P\sup} = \tfrac{1}{2} m \cdot v_L^{\,2} + \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right)$$

v_L = velocidad de lanzamiento para el escape de la atracción gravitatoria

La energía a la altura "h" tendrá el mismo valor, y será :

$$E_h = E_{ch} + E_{ph} = 0 + \left(-G\frac{M_T m}{R_T + h}\right)$$

ya que la velocidad, una vez alcanzada la órbita, es cero ($v_h = 0$).

De igualar ambas expresiones tendré :

$$\tfrac{1}{2} m \cdot v_L^{\,2} + \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right) = \left(-G\frac{M_T m}{R_T + h}\right)$$

De donde puedo obtener $v_L = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)}$.

Si lo queremos sacar de la influencia del campo gravitatorio, tendré que hacer ($h \to \infty$)

de donde : v_L (vel. de escape) $= \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2g_0R_T^2}{R_T}} = \sqrt{2g_0R_T} = 11{,}2\,km/sg.$

Campo gravitatorio XXVIII: Movimiento de satélites y planetas (III)

- Para que un satélite gire en una órbita circular alrededor, pongamos de la Tierra, debe de estar sometido a una fuerza centrípeta.
- **Esta fuerza centrípeta** será suministrada por la atracción gravitatoria que ejerce sobre el satélite. De esta consideración podremos obtener la velocidad orbital. Y el **periodo de revolución**

$F_G = F_C;$

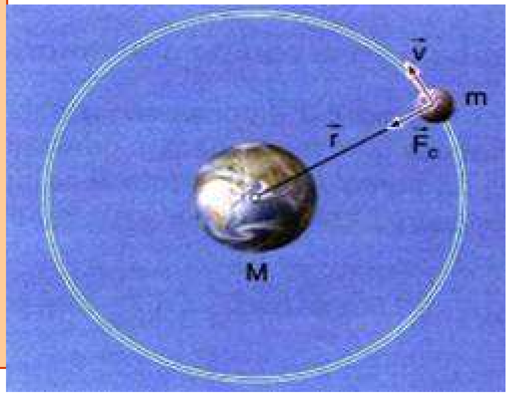
$$G \cdot \frac{M_T m}{r^2} = m \cdot a_C = m \frac{v^2{}_{orb}}{r}$$

$r = R_T + h$

$$v_{orb} = \sqrt{G \frac{M_T}{r}}$$

Esta última ecuación, la puedo escribir en función de la gravedad terrestre g_0

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}; entonces: v_{orb} = \sqrt{g_0 \frac{R_T^2}{R_T + h}}$$



Para obtener el periodo de revolución, tendremos que dividir la longitud de la órbita, entre la velocidad orbital

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_{orb}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\sqrt{G \frac{M_T}{r}}}$$: válida para cualquier planeta o satélite

O bien, en función de la gravedad terrestre g_0

$$T = \frac{2\pi (R_T + h)}{\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + h}}} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0 R_T^2}}$$

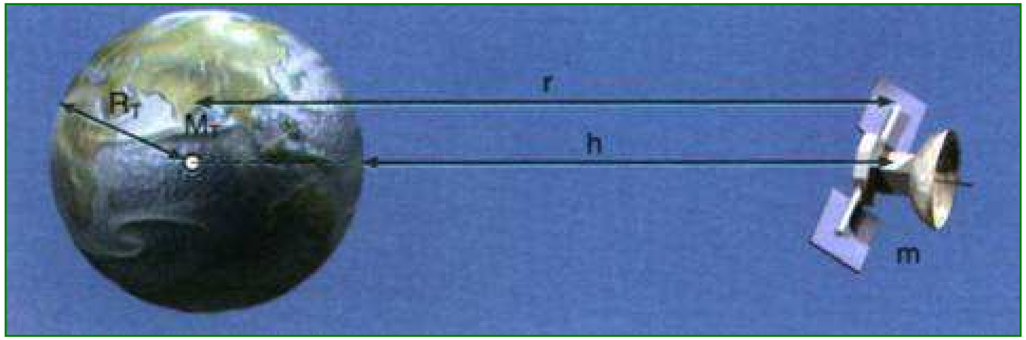
Si observamos esta última expresión, podremos poner:

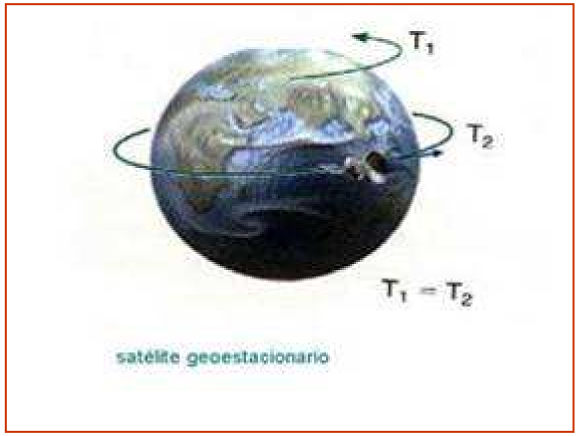
$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{g_0 R_T^2}:$$

Donde R, puede ser el radio de la tierra, o el de giro del cualquier satélite:

es decir $: T^2 = K r^3;$

que se trata de la expresión de la tercera ley de Kepler





Campo gravitatorio XXIX: Movimiento de satélites (IV)Energía de un satélite en órbita estacionaria (Energía de enlace).

- Sumaremos las energías potencial y cinética en la órbita

$$E_{orb.est} = E_{c.vorb} + E_{p.alt.h} = 1/2 \cdot mv_{orb}^2 + \left(-\frac{GM_T.m}{R_T + h} \right)$$

Para un planeta cualquiera, sería válida la expresión sin mas que hacer: $M_T = M$ y: $R_T + h = r$.

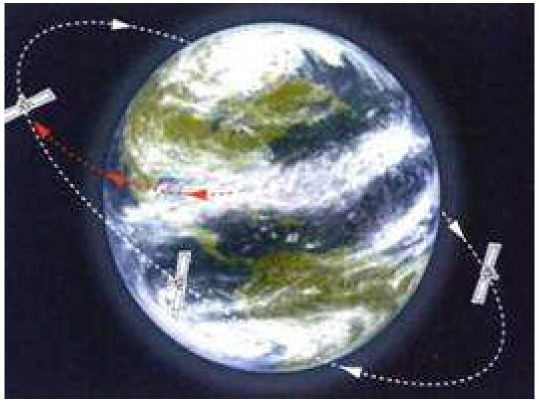
Por la tanto:

$$E_{orb.est} = 1/2m \cdot \frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -G\frac{Mm}{2r} = (tierra) = -\frac{GM_T m}{2 \cdot (R_T + h)}$$

De la interpretación de los resultados concluimos que:

$$E_{orb.est} = 1/2E_{P.alt.h} = -E_{c.v.orb}$$

La energía en la orbita es igual y de signo contrario a la E_C en al órbita

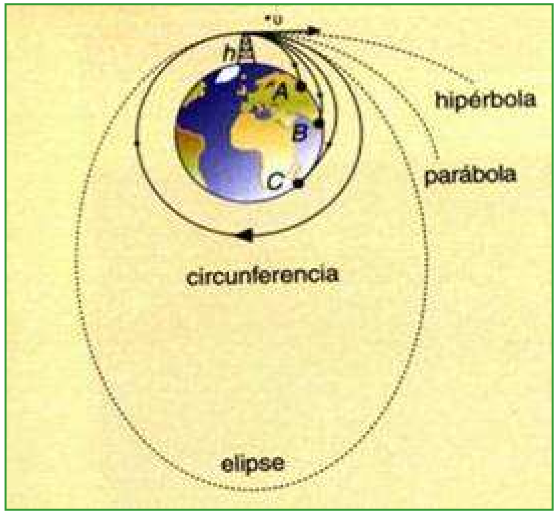


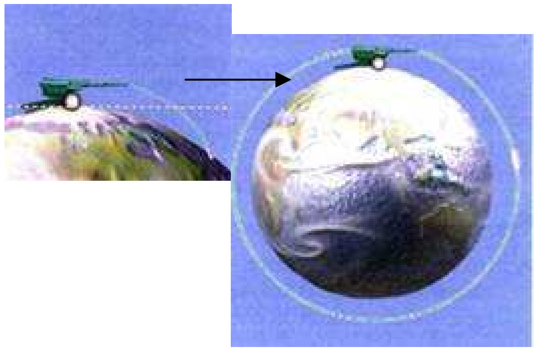
Las órbitas **geoestacionarias,** corresponden a altitudes elevadas(en torno a los 36.000km. , por tanto, los satélites, no pueden obtener imágenes de alta resolución de la tierra. Son órbitas ecuatoriales, y se usan principalmente para aplicaciones meteorológicas y de comunicaciones.

Las órbitas da baja altitud (entre 600 y 1200 Km.) se llaman HELIOSICRÓNICAS, por que el plano de la órbita, tiene una orientación fija respecto del Sol. Pueden obtenerse imágenes de alta resolución, se utilizan para la observación de la tierra y análisis de recursos

Campo gravitatorio XXX: Movimiento de satélites(V)
Energía de puesta en órbita

- Para colocar en órbita un satélite artificial, necesitaremos una energía para llevarlo, desde la superficie a la altura h.
- Necesitaremos una energía potencial, para vencer las fuerzas conservativas del campo y colocarlo a la altura h.
- Necesitaremos además un energía cinética, para que permanezca en la órbita, con la velocidad orbital.
- Newton nos lo contaba así:
- "*Cuanto mayor sea la velocidad con la cual se lanza una piedra, mas avanza antes de caer en la tierra . Por tanto, podremos suponer que la velocidad pueda incrementarse tanto, que describa un arco de 1,2,5,10,100,1000 millas antes de llegar a la Tierra, hasta que finalmente ,sobrepasando los límites de ella, debe pasar al espacio sin tocarla*".
- Podremos idear el experimento, suponiendo que subimos el satélite a lo alto de una torre de altura h, desde la cual disparamos el proyectil o satélite con un enorme cañón, al que dotaremos de suficiente velocidad para que permanezca en la órbita (velocidad orbital).





La energía de puesta en órbita

la obtenemos del principio de conservación

$$E_{necesaria} + E_{pot.\sup erf.} = E_{c.enorbit} + E_{p.alturah}$$

$$E_{necesaria} + \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right) = \frac{1}{2}m \cdot v_{orb}^2 + \left(-G\frac{M_T m}{R_T + h}\right)$$

$$E_{necesaria} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_T + h} + G\frac{M_T m}{R_T}$$

Campo gravitatorio XXXI: Movimiento de satélites (VI):Consideraciones sobre la velocidad en la Órbita

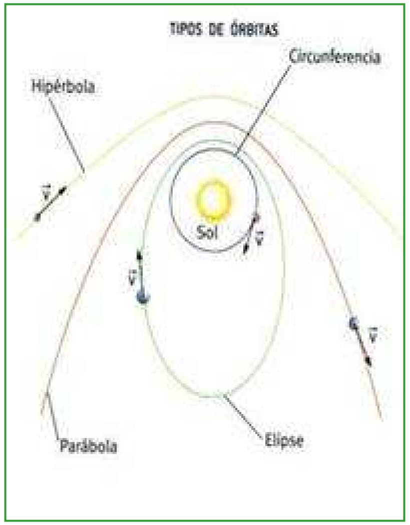
- La colocación en la órbita se realiza en dos fases, la primera se lleva a una altura h mediante cohetes. Desde esta h se impulsa con velocidad v_o
- Una vez que hemos colocado el satélite en órbita, discutiremos sobre la posibilidad de que la velocidad sea mayor, o menor que la velocidad orbital,:
- **Sea $v_{o,}$ la velocidad del satélite en la órbita; v_{oc}, la velocidad en al órbita circular**
- Si $v_o<v_{oc}$; necesariamente ha de caer hacia la tierra.
- Si $v_o=v_{oc}$; el satélite describirá una órbita circular.
- Para $v_o>v_{oc}$, la órbita descrita será una elipse, que aumenta su excentricidad a medida que aumenta v_o.
- Si $v_{o,}$ es ***suficientemente grande***,el eje mayor de la elipse, se hará infinito(se convierte en una parábola); a tal velocidad le llamaremos velocidad de escape de la órbita , y el satélite tendrá una energía nula en el infinito; es decir, :

$$E_{inicial} = E_{co} + E_{po} = 1/2 m v^2_{escapeorbita} - G\frac{M_T \cdot m}{R_T + h}; \text{Para que llegue al } \infty \text{ con E nula } (E=0)$$

$$\text{es decir: } v_{esc.orb.} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{2}v_o.;$$

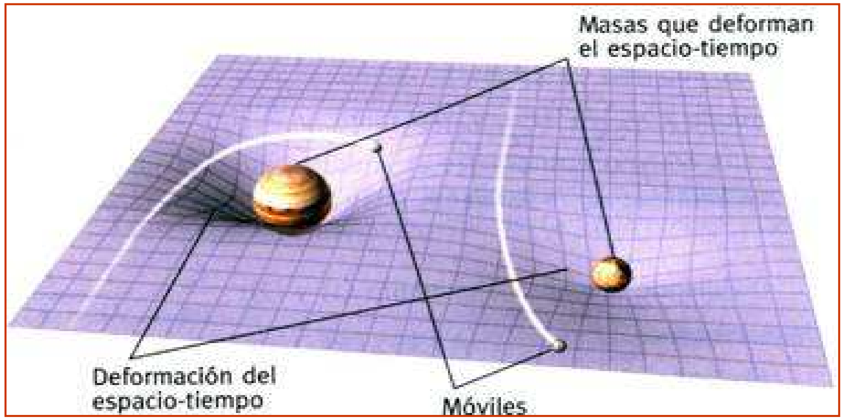
En órbitas parabólicas, la energía total del satélite en el infinito, es cero, siendo cero la potencial en la órbita, y mayor que cero, la cinética, hasta que se anula en el infinito. Se ha de observar que la velocidad de escape, desde una órbita circular, es $\sqrt{2}$ veces mayor, que la velocidad en esa órbita

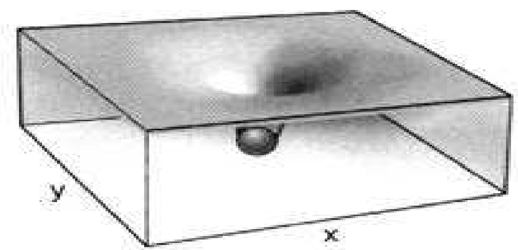
Si $v_o>>v_{oc}$; la órbita sería una hipérbola, y llegaría al infinito con velocidad >0



Campo gravitatorio XXXII: Movimiento de satélites(VII),Modelo del pozo gravitatorio

- Par entender la velocidad de escape, se utiliza el"***Modelo de pozo gravitatorio***".
- Encontrarnos sobre la superficie de la tierra, equivale a encontrarnos en el fondo de un pozo, de varios miles de km de profundidad .
- Si queremos viajar al espacio interplanetario, debemos de salir de este pozo, a un plano horizontal llamado ***espacio libre gravitacional.*** *Coincide con el nivel cero de energía potencial*.
- Se considera que un cuerpo escapa de la atracción gravitatoria terrestre, cuando llega a una distancia infinita de la tierra (E_P=0), con velocidad nula(E_C=0). La velocidad, **es la de escape** (ver diapositiva anterior).
- Como el producto $E_P.r= -(GM_Tm/r).r=GM_Tm$ =cte. quiere decir, que la curva que representa dicha figura, es una hipérbola equilátera, que engendra una superficie cónica de generatriz curva, si girase entorno a un eje vertical, como en la figura :
- Dicha superficie, representa el pozo gravitatorio en el que estamos inmersos, y determina las órbitas circulares o elípticas de los satélites .
- Si construimos un dispositivo así, encontraríamos, que el tipo de órbita, se obtiene modificando la velocidad inicial de una canica que simule el satélite, y que lanzaremos siguiendo la curvatura del pozo





Gráfica del pozo de E_p del espacio que rodea a una masa M como la de la Tierra

Campo gravitatorio XXXIII: Epílogo (I) :**Gigantes a hombros de gigantes**

Copérnico
TychoBrahe
Kepler

- *Es el deber de un astrónomo, componer la historia de los movimientos celestes a través de la observación cuidadosa y experta.Entonces,...entonces debe concebir y trazar, ya que no puede de ninguna manera llegar a las verdaderas causas, hipótesis tales, que siendo asumidas, permitan que los movimientos sean calculados correctamente a partir de los principios de la geometría....Por consiguiente, no quiero ocultar a vuestra Santidad que lo único que me impulsó a buscar otra forma distinta de deducir los movimientos de las esferas, fue el echo de que no existe acuerdo entre las investigaciones de los diferentes matemáticos*.(Nicolás Copérnico;1473-1543. De Revolutionibus Orbium Coelestium).
- Justo es, en esta situación, Mencionar a Tycho Brahe(1546-1601), cuya aportación a las posteriores teorías fue crucial, debido a las cuidadosas medidas de distancia a los planetas y periodos de revolución de los mismos, desde el observatorio que instaló en su propio castillo, y de cuyas observaciones y hospitalidad, se sirvió Kepler para asentar su teoría heliocéntrica

Campo gravitatorio XXXIV: EPÍLOGO (II): GIGANTES A HOMBROS DE GIGANTES

•Concluye Nicolás Copérnico (1525)"**Verdaderamente ¿quién podría situar esa luz en otro lugar mejor que en el que aquel, desde el que puede iluminarlo todo a la vez" ¡**No se atrevió a publicarlo! Posteriormente, Galileo que se expresa con los siguientes comentarios: Nunca podré admirarlos lo suficiente(Se refiere a Copérnico y a sus seguidores), **mediante pura fuerza de intelecto, riñeron hasta tal punto con su sentido común, como para preferir lo que les dictaba la razón, a lo que la experiencia responsable les mostraba claramente.**

• En el auto de acusación de Galileo, la Iglesia declaró:

•"La doctrina de que la Tierra no se halla en el centro del universo, ni que está inmóvil sino que gira, incluso en una rotación diaria; es absurda, es falsa desde el punto de vista psicológico y teológico, y constituye, cuando menos una ofensa a la fe".

•Galileo respondió: **Se condena la doctrina que postula que la Tierra se mueve y el Sol está fijo, por que las escrituras mencionan en muchos pasajes, que el sol se mueve, y la tierra permanece fija. Afirman los piadosos que las escrituras no pueden mentir, pero nadie negará que con frecuencia son abstrusas y su verdadero significado difícil de comprender; su importancia va mas allá de las meras palabras. Opino que en la discusión de los problemas naturales, <u>no deberíamos empezar por las escrituras, sino por los experimentos y las demostraciones</u>**.

•Posteriormente Galileo ha de retractarse de tales afirmaciones, y confesarle a sus mas íntimos ,y al oído después del proceso, que: **<u>sin embargo se mueve</u>**.

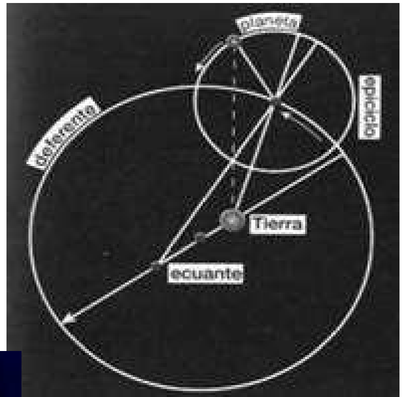
• Desarrollar valores y actitudes propias del pensamiento científico, como la búsqueda de información, la curiosidad, la capacidad crítica, el trabajo sistemático, y riguroso, el cuestionamiento de cualquier interpretación, y una actitud tolerante y no dogmática, todo ello forma parte de los procedimientos de la ciencia. En contra de ello; Creo que merece la pena destacar aquí un comentario de **Robert Cardinal Bellarmine, principal teólogo del Vaticano, a principios del S. XVII** "**Afirmar que el Sol se halla fijo en el centro de los cielos y que la Tierra da vueltas muy rápidamente a su alrededor, es algo ciertamente peligroso**". Concluye afirmando: "**La libertad de pensamiento es perniciosa, no es mas que la libertad de estar equivocado"**

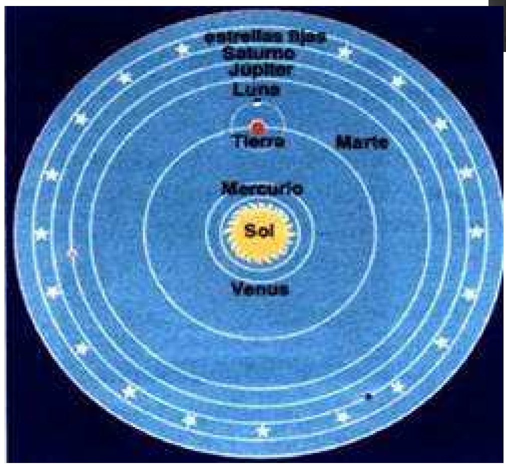
•**¡Qué difícil era construir entonces el conocimiento!**.

• En la actualidad, los avances en este campo son mas que considerables, es por esto que el nuevo S.E. se configura" **en un tiempo en que no se empieza por las escrituras."**

•Comparemos la situación de entonces, con este otro comentario de Stephen W. Hawking;" **El progreso de la raza humana, en la comprensión del universo, ha creado un pequeño rincón de orden, en un universo cada vez mas desordenado."**

Campo gravitatorio XXXV:EPÍLOGO (III) GIGANTES A HOMBROS DE GIGANTES. Evolución de los modelos cosmológicos hasta Galileo

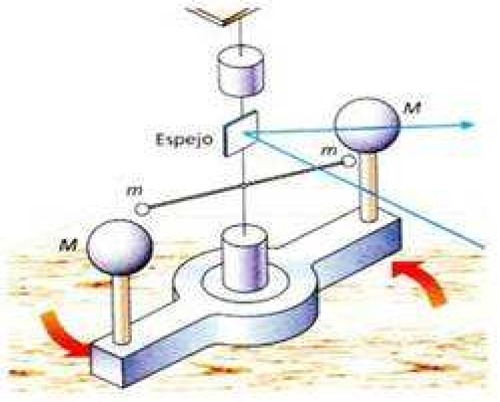




- El modelo aristotélico, es Geocéntrico tiene un vigor, de mas de 18 siglos.
- El modelo de Ptolomeo, explica el aparente movimiento retrógrado de los planetas como el Marte, que se aprecia en la imagen.Se trata de un modelo geométricamente complejo, aunque plagado de aciertos. Los planetas describen una órbita principal llamado Deferente y circunferencias secundarias (Epiciclos),a lo largo del Deferente.Las ideas de Ptolomeo se recogen en su obra el **Almagesto**
- El modelo Copernicano es heliocéntrico explica, de forma mas sencilla el movimiento de los planetas

Campo gravitatorio XXXVI: EPÍLOGO (IV) GIGANTES A HOMBROS DE GIGANTES: Desde Newton a Hawking(I)

- Newton en su libro Principios matemáticos de filosofía natural,(en su tiempo así se llamaba la Física)recoge el mayor compendio de mecánica jamás concebido. Gracias a sus descubrimientos, y en particular la ley de gravitación, entendemos el movimiento de los planetas, satélites, cometas.
- Reconoció su deuda con sus predecesores en la famosa frase ***"Si he visto mas allá que el resto de los mortales es por que me subí a hombros de gigantes",*** como Kepler , Galileo y Copérnico



Esquema de la balanza de Cavendish
Para medir G

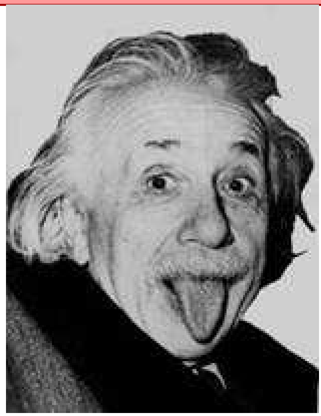
La ley de gravitación universal, fue comprobada experimentalmente en el laboratorio, mediante la famosa balanza de Cavendish para determinar **G**

Campo gravitatorio XXXVII: EPÍLOGO (V) GIGANTES A HOMBROS DE GIGANTES: **Desde Newton a Hawking(II)**

Einstein

Hawking

- Hace falta llegar al siglo XX, para explicar fenómenos del microcosmos para los cuales la mecánica de Newton es insuficiente. Entraremos, en la **mecánica Cuántica**
- Surge la figura de otro de los grandes genios Albert Einstein, que en su teoría de la relatividad arroja una pizca de luz sobre el conocimiento . Es el origen de la **mecánica relativista**
- Y es preciso llegar a los albores del siglo XXI para adentrarnos en el conocimiento del universo, Físicos como Hawking, pelean el la actualidad para encontrar las respuestas



Formulario de gravitación

Rev. concepto de trabajo	$W=\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$
Teorema de las F. Vivas	$W=\Delta E_c$
Trabajo y E_p	$W=\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}=E_{PA}-E_{PB}=-\Delta E_P$
3ª Ley de Keppler	$T^2=Cte.R^3$
Ley de gravitación	$\vec{F}=-G\frac{M.m}{r^2}.\vec{u}_r$; $G=6{,}67.10^{-11}$
Intensidad del C. Gravitatorio	$\vec{g}=-G\frac{M}{r^2}\cdot\vec{u}_r$
Flujo del C. Gravitatorio	$\Phi=\int_S \vec{g}\cdot d\vec{S}=\int_S g\cdot dS\cdot\cos\alpha$
Principio de superposición	$\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$;
Variación de g con la altura	$g_h=g_0\frac{R_T^2}{(R_t+h)^2}$; $g_o=G.M/R_T^2$
Variación de g con la profundidad	$g=g_0\, r/R_T$
Teorema de Gauss	$\{\Phi=-4\pi\cdot G\cdot M\}$
Energía Potencial gravitatoria	$\left\{E_P=-\frac{GMm}{r}\right\}$
Potencial gravitatorio	$V=-G\frac{M}{r}$ $V_A-V_B=\int_A^B\vec{g}\cdot d\vec{r}$

Formulario de gravitación 2

Velocidad de escape de la tierra	$v_L\,(\text{vel. de escape}) = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2}{R_T}} = \sqrt{2g_0 R_T} = 11{,}2 km/sg.$
Velocidad Orbital	$v_{orb} = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}$ $\quad v_{orb} = \sqrt{g_0 \frac{R_T^2}{R_T + h}}$
Periodo de revolución	$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{g_0 R_T^2}: \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0 R_T^2}}$
E. De un satélite en órbita estacionaria	$E_{orb.est} = \frac{GM_T m}{2\cdot(R_T + h)}$ $\quad E_{orb.est} = 1/2 E_{P.alt.h} = -E_{c.v.orb}$
E. De puesta en Órbita	$E_{necesaria} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_T + h} + G\frac{M_T m}{R_T}$
Velocidad de escape de la Órbita	$v_{esc.orb.} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{2}v_o.$