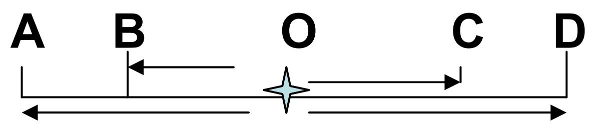
El oscilador armónico (I): Ecuación de oscilador Armónico



OA=Amplitud=OD

OB=x; elongación

OC=x';elongación

Un movimiento que responde a la ecuación $x=A\text{sen}(\omega t+\varphi)$

X es la elongación

A= amplitud de la oscilación; es la elongación Máxima

ω=Pulsación

t=tiempo

φ=fase inicial.

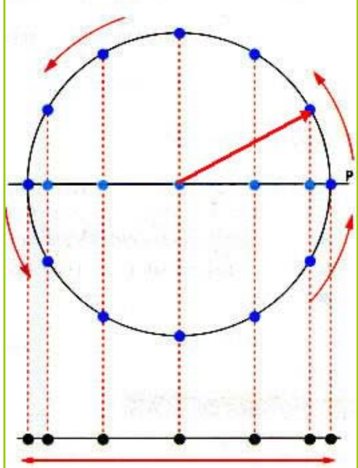
El movimiento vibratorio Armónico simple (MVAS), describe el desplazamiento de vaivén entorno a un punto de equilibrio:

El movimiento OBABOCDCO, es una oscilación completa; el tiempo que tarda en describirla se le llama Periodo T, y al número de veces que efectúa la oscilación completa en un segundo, se le llama frecuencia

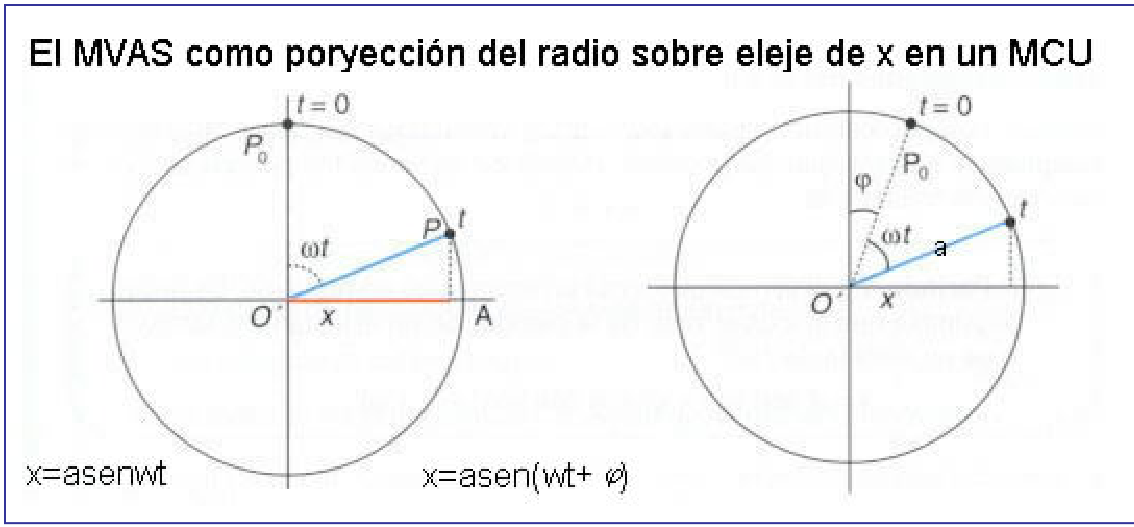
Ejemplos de MVAS

El oscilador armónico (II): El MVAS como proyección sobre el diámetro de un MCU (Mov Circular Uniforme)

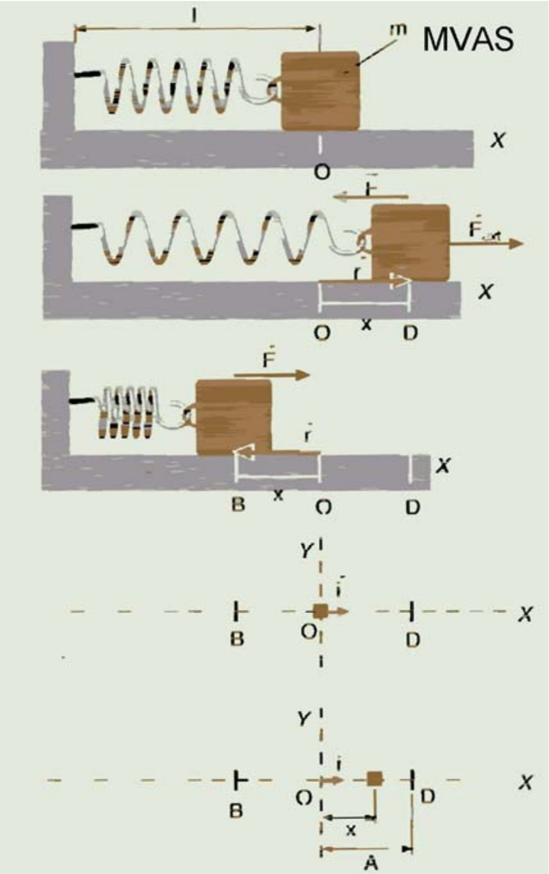
- Supongamos que sujetamos una linterna con una cuerda en una habitación oscura. Ahora, la obligamos a girar por encima de nuestras cabezas en un plano horizontal.
- Un observador, percibirá un movimiento de vaivén entorno al punto por donde sujetamos la cuerda.
- Supongamos un Movimiento Circular Uniforme (MCU). Proyectemos ahora sobre el eje horizontal cualquier punto de la trayectoria, concretamente aquel que se encuentra formado un ángulo ($\omega t+\varphi$) con el eje de las Y.
- El valor de la abscisa será $x=A\text{sen}(\omega t+\varphi)$



La proyección del R vector sobre el diámetro describe un MVAS



El oscilador armónico (III): Parámetros del OA



Pudiendo ser considerado como un mov circular uniforme, será posible, utilizar ciertos parámetros que en su día describimos allí.

En un tiempo T (periodo), se describe un giro completo de circunferencia(2π radianes);

La velocidad angular ω=2π/T , le llamaremos pulsación en el MVAS.

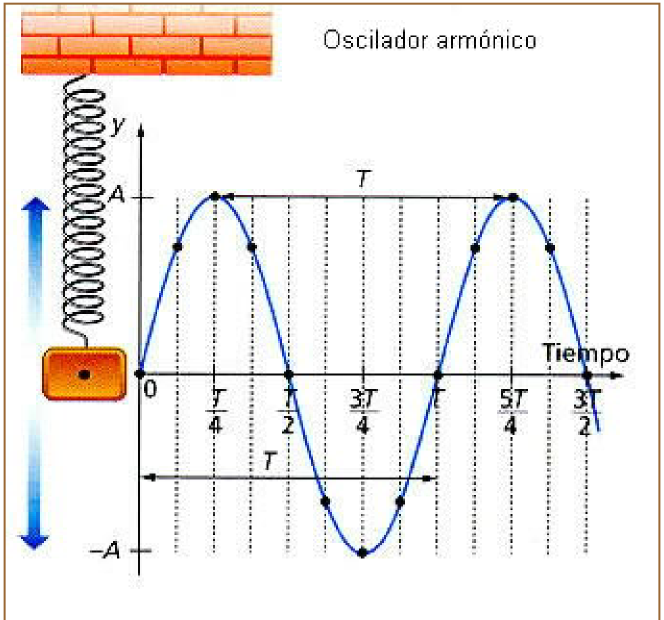
La frecuencia será por la propia definición $\nu = 1/T$. Es el número de vueltas en un segundo, o bien el número de oscilaciones por segundo.

En la ecuación del movimiento , la fase ($\omega t+\varphi$), o ángulo de fase, representa la posición del móvil en cualquier instante. Al comenzar a contar el tiempo (t=0) nos queda φ que llamamos fase inicial .

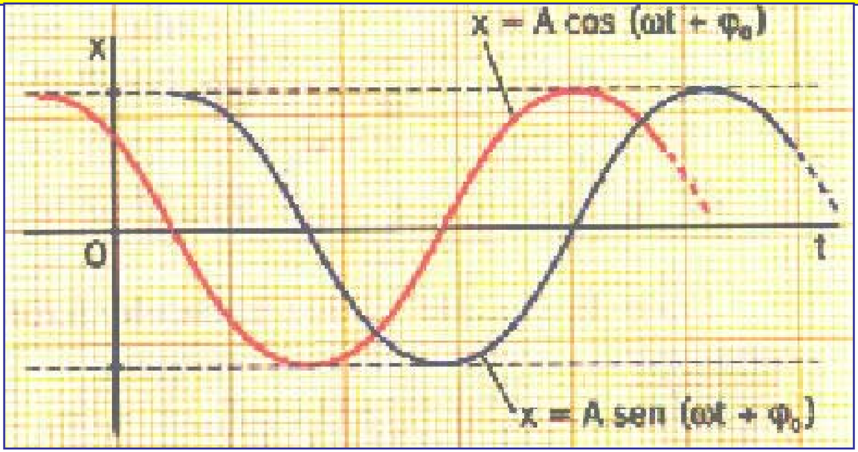
El ángulo de fase debe expresarse en radianes.

El dibujo muestra un resorte en posición horizontal, cuyo movimiento de vaivén es el de un OA

El oscilador armónico (IV): Representación del MVAS



Oscilaciones de un resorte suspendido



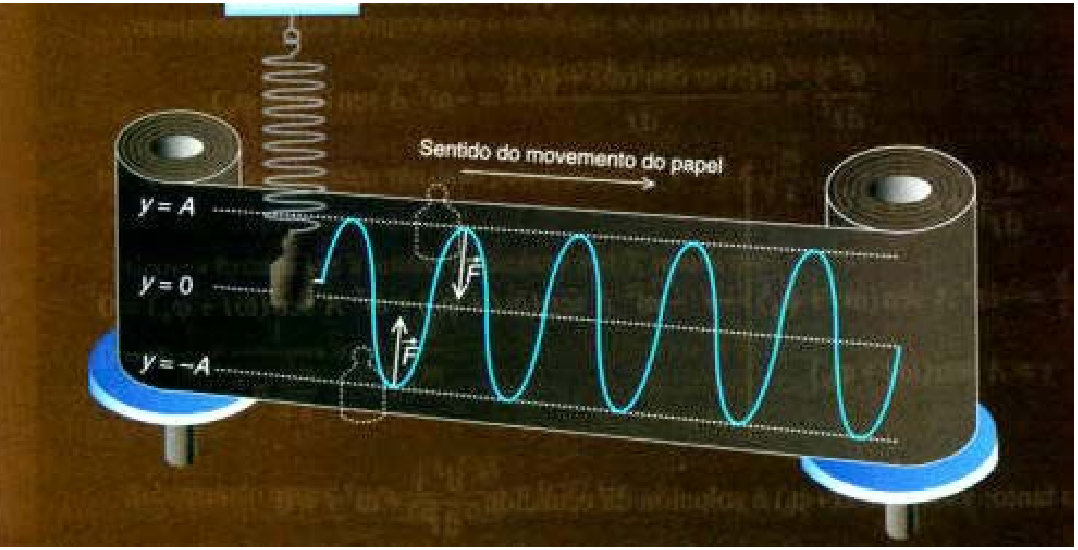
La ecuación del movimiento VAS es una función senoidal, por tanto, su representación es la del seno.

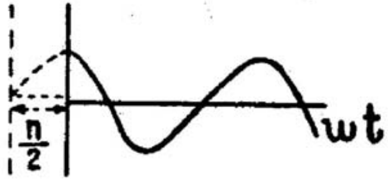
Si pensamos en proyectar en el MCU sobre el eje vertical, la representación puede aparecer en forma del coseno; pero en ambos casos estamos ante un MVAS su representación será y=Acos(ωt+φ).

El desfase entre seno y coseno es de π/2 (si comienzo a contar el tiempo un cuarto de periodo mas tarde tengo la representación del coseno)

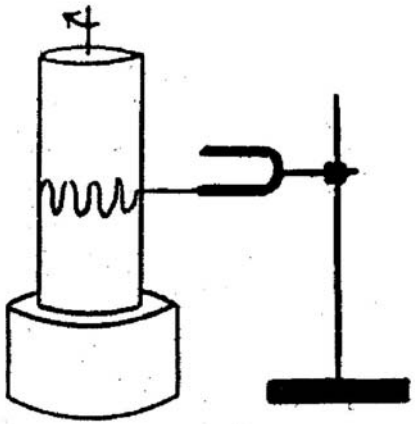
El oscilador armónico (V): Visualización de la representación del MVAS

Si dispongo de un sistema de relojería que permita el avance de una banda, y solidario con el resorte un grafo que dibuje sobre la banda, la composición de los movimientos de avance de la banda y oscilación del extremo del muelle, “dibujarán”, sobre la banda, una función senoidal

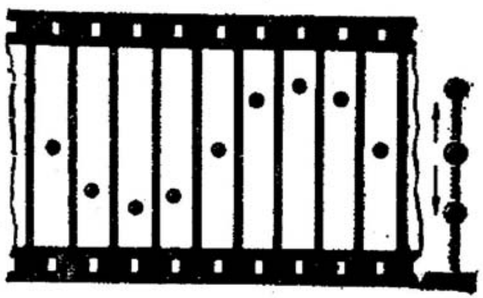




Si comienzo a contar el tiempo un cuarto de periodo mas tarde tendremos la representación del coseno

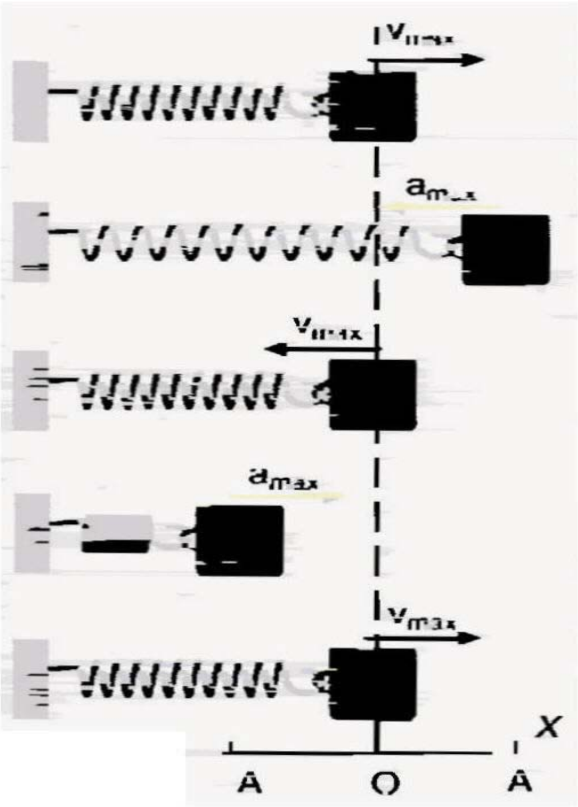


El mecanismo de relojería acciona el cilindro y representa el MVAS



- La velocidad del MVAS se obtendrá derivando la ecuación:
- $v=dx/dt=d/dt(A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi))=A\omega\cos(\omega t+\varphi)$
- Para la aceleración derivamos la v
- $a=dv/dt=d/dt\,A\omega\cos(\omega t+\varphi)=-A\omega^2\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$

Posiciones en que v, y, a, son máximas



El oscilador armónico (VII): v y a en función de la elongación

Podremos escribir la velocidad y aceleración en función de x; recordando que $sen^2\alpha+cos^2\alpha=1$

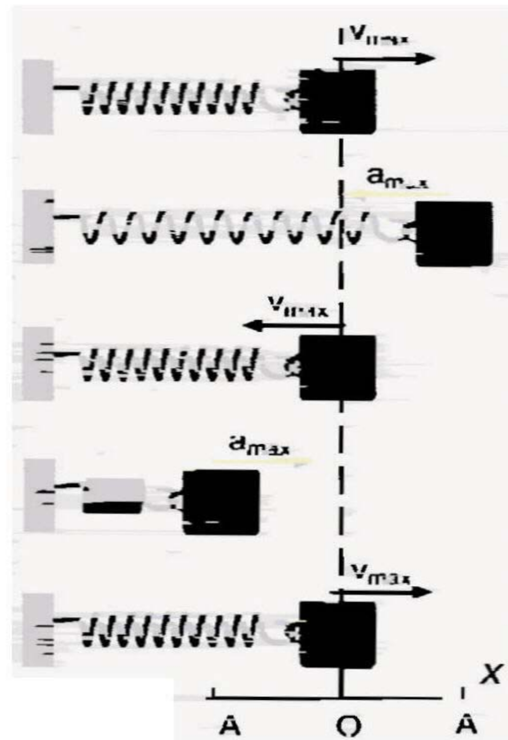
Para la aceleración es

- mas sencillo:
- $a=-A\omega^2 sen(\omega t+\varphi)=-\omega^2 x$
- Para la velocidad

$$\begin{cases} v = A\omega\cos(\omega t+\varphi) = A\omega\sqrt{1-sen^2(\omega t+\varphi)} \\ = \omega\sqrt{A^2-A^2 sen^2(\omega t+\varphi)} = \omega\sqrt{A^2-x^2} \end{cases}$$

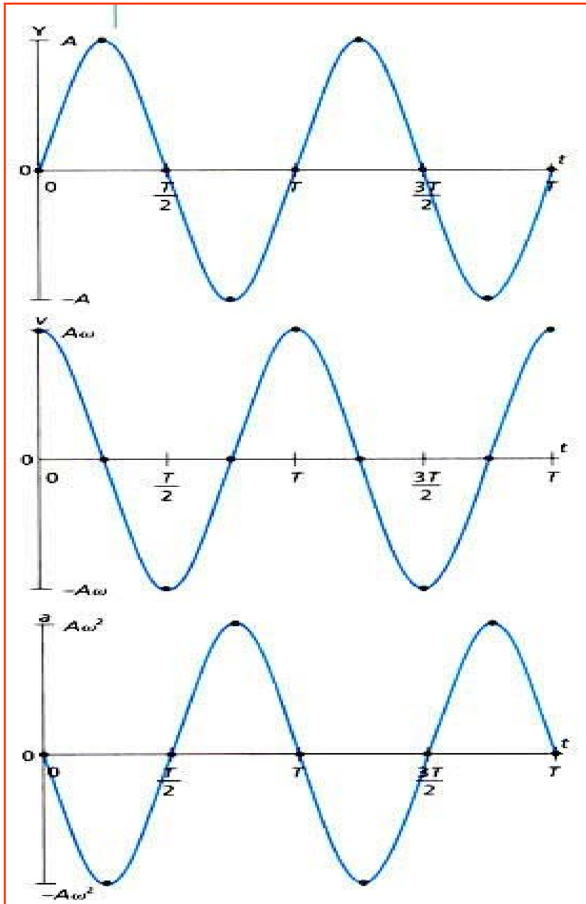
Posiciones en que

v, y, a, son máximas



- De las ecuaciones encontramos:
- Que **a** es máxima cuando lo es **x** ,es decir, en el extremos del movimiento; sin embargo, la velocidad **v**,será máxima cuando **x** sea mínima , es decir en el centro del movimiento

El oscilador armónico (VIII): Representación de las funciones armónicas elongación, velocidad y aceleración



Elongación, velocidad y aceleración son funciones armónicas

las amplitudes son diferentes

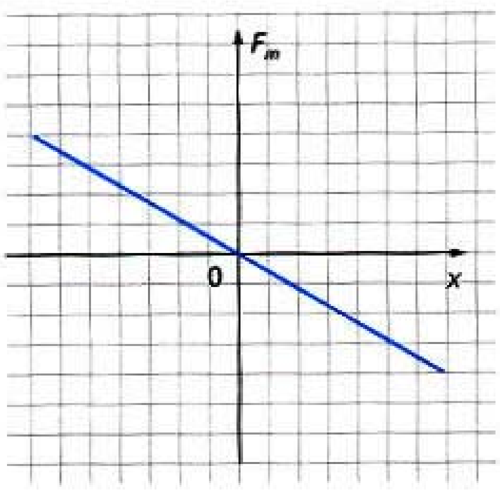
$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Podremos llegar a las mismas conclusiones en lo que se refiere a máximos y mínimos de de v y de a, del análisis de las gráficas

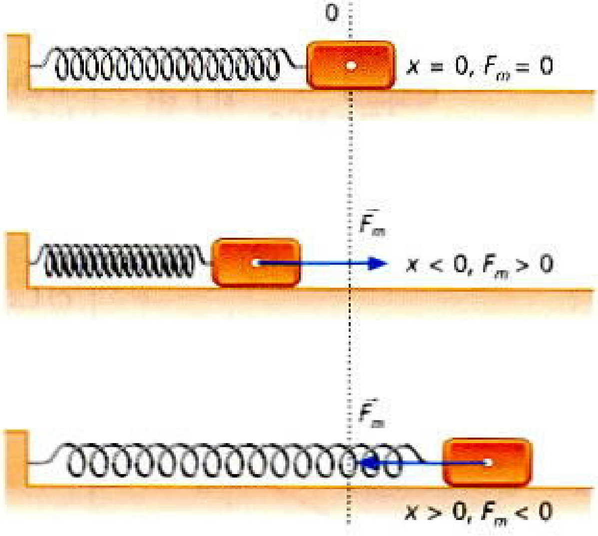
El oscilador armónico (IX): Dinámica del OA



Relación entre fuerza y deformación

Ley de HOOKE: F=-Kx

En este apartado estudiaremos la fuerza productora del MVAS



Dinámica de MVAS ley de HOOKE

El comportamiento dinámico de un muelle como el de la figura, viene está regulado por la ley de HOOKE;

La fuerza recuperadora de un resorte elástico es directamente proporcional a su deformación : F =-kx

K=constante elástica, x= deformación, F =fuerza recuperadora del muelle

El oscilador armónico (X): Periodo de las oscilaciones

- En ausencia de rozamientos, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que oscila, es la fuerza recuperadora del muelle:
- Por tanto $F=ma=-kx$;
- $-kx=m(-\omega^2 x)$; $k=m\omega^2=m(2\pi/T)^2$;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

El oscilador armónico (XI): Energía cinética del OA

- Sabemos que la ENERGÍA de una masa m a una velocidad v es: $E_c=1/2mv^2$.
- Si sustituimos v por su valor en el OA, tendré $E_c=1/2m[A\omega\cos(\omega t+\varphi)]^2$.
- O lo que es lo mismo: $E_c=1/2m\omega^2(A^2-x^2)$.
- Una primera conclusión, es que la energía cinética es máxima cuando x=0.
- $E_{c\ max}=½m\omega^2A^2$

El oscilador armónico (XII): Energía potencial del OA

- La variación de energía potencial que experimenta una masa m, al trasladarse de un punto A a otro B por la acción de una fuerza elástica F, coincide con el trabajo realizado por esa fuerza pero cambiado de signo, es decir:
- $\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB}$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B (-kx\vec{i}\,) dx\vec{i} = \int_A^B -kxdx =$$

$$W_{AB} = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_A^B = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = \frac{1}{2}k\left(x_A^2 - x_B^2\right)$$

Si tomamos el origen de energías E_P en $x_A = x_0 = 0$

$E_{pA} = E_{P0} = 0$, entonces la energía pot en un punto $x = x_B$, será :

$E_P = -W;$

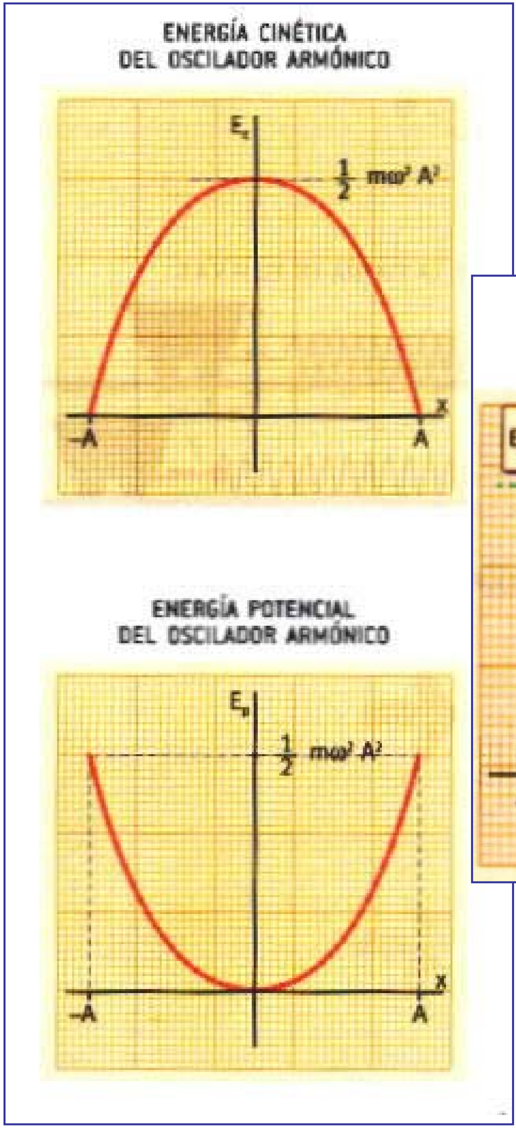
$E_P = \frac{1}{2}kx^2$ Si expreso x en función del tiempo tendré :

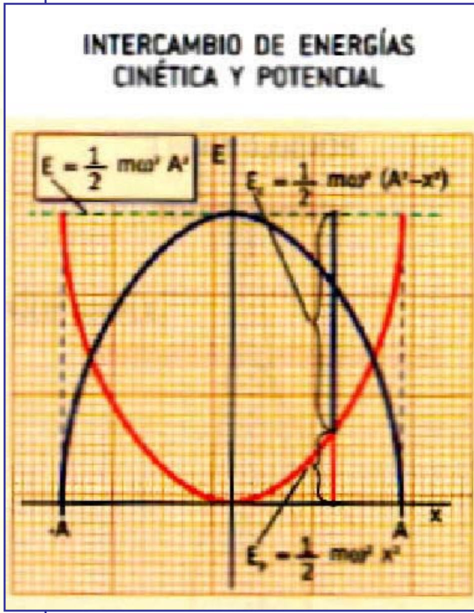
$E_P = \frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t + \varphi)$, sigue siendo una función armónica

Una conclusión inmediata es que la E_p es max cuando lo es la elongación (x=A)

El oscilador armónico (XIII): Energía mecánica del OA

- Tanto al E_p, como la E_c son funciones armónicas, su representación también será senoidal:
- La Energía mecánica será la suma de las energías cinética y potencial: y coincidirá con la máxima cinética (en el centro del mov, (donde la V es Máx.) o la máxima potencial (en el extremo del mov. , donde la V=0).
- Efectivamerte: $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}k(A^2-x^2) + \frac{1}{2}kx^2 = . \frac{1}{2}kA^2$



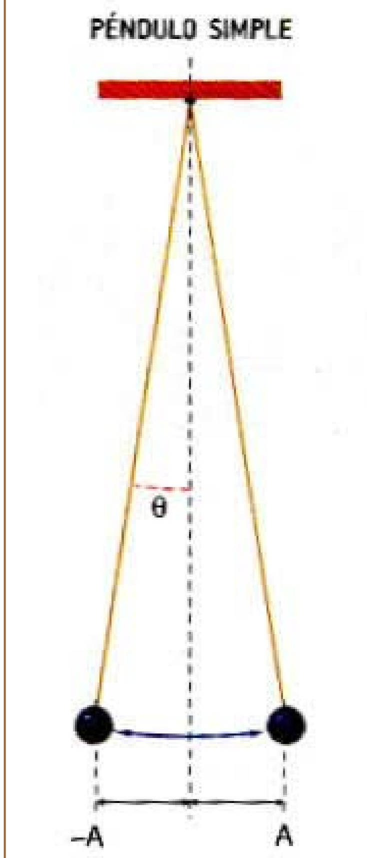


El oscilador armónico (XIV): Estudio del péndulo simple

El péndulo simple, consta de una pequeña masa colgada de un hilo inextensible y de masa despreciable, suficientemente largo para que las oscilaciones puedan estudiarse como las de un OA.

Al desplazarse un ángulo tan pequeño, el movimiento del péndulo, podrá asimilarse a un desplazamiento horizontal sin rozamiento.

Si el ángulo θ es tan pequeño, podremos escribir:sen θ= θ cuando lo expresemos en radianes



Para pequeñas oscilaciones se puede aproximar a un MVA

El error que cometemos es, hasta 14 º, del orden del 1%.

Y si fuese de 30º, sería , tan solo, del 4,6%

Angulo grados	radianes	seno
5º	0,087	0,087
10º	0,174	0,175
15º	0,259	0,262

El oscilador armónico (XV): El periodo del Péndulo simple

P_x, la componente horizontal de P, puede asociarse a la fuerza recuperadora del resorte(-kx),con lo que :P_x=-mgsenθ= -mgθ.

Teniendo en cuenta que:

arco=Angulo (En rad) x Radio;

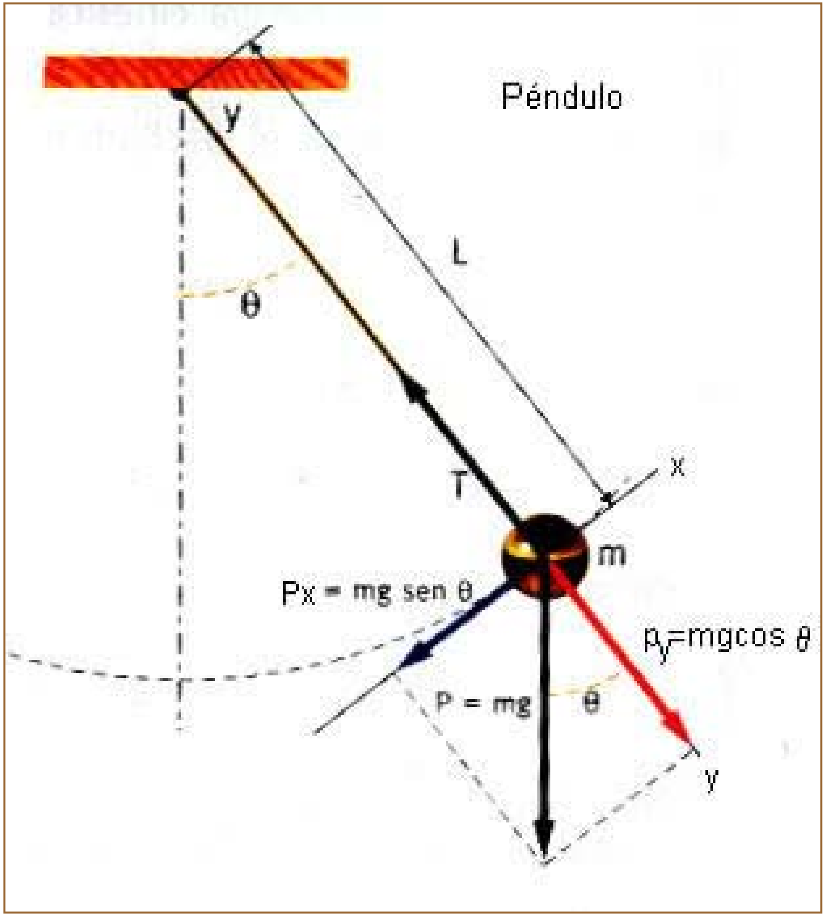
Podré poner : -mgθ=-mgx/L=-kx

Pero:k=mω^2; por tanto: mgx/L=mω^2x

De donde: g/L= $(2\pi)^2/T^2$.

De donde obtenem
péndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



Formulario del oscilador armónico

- $x = A\,\text{sen}(\omega t+\varphi)$; $\omega = 2\pi/T$; $T = 1/\nu$
- $V = A\omega\cos(\omega t+\varphi)$; $\Rightarrow$

$$v = A\omega\cos(\omega t+\varphi) = A\omega\sqrt{1-sen^2(\omega t+\varphi)}$$
$$= \omega\sqrt{A^2 - A^2 sen^2(\omega t+\varphi)} = \omega\sqrt{A^2-x^2}$$

- $a = -A\omega^2 \text{sen}(\omega t+\varphi)$; $\Rightarrow$ $a = -\omega^2 x$
- ***F=-kx***
- $\boldsymbol{K = m\omega^2}$
- $E_c = 1/2\, m\omega^2 (A^2 - x^2)$
- $E_p = 1/2\ kx^2$
- $E_m = E_c + E_p = ½k(A^2 - x^2) + ½kx^2 = . ½kA^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

resorte

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Péndulo